ÁLGEBRA 2 (10-4-2014)	**Grado en Físicas** **Curso 2013–14**	**Hoja C2**

Movimientos.

1^e. Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín sobre un K-espacio vectorial V, $A \in \mathcal{A}$, $W \subset V$ un subespacio vectorial y la variedad afín $L = A + W$. Demostrar:

(i) Si $B \in L$, entonces $L = B + W$. (ii) $W = \left\{ \overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in L \right\}$

2. Sean $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ el plano afín, y respecto a un sistema de referencia $\mathcal{R}$, se dan los puntos $A = (1,1)$ y $B = (-2,0)$, los vectores $u = (1,2)$ y $v = (-1,1)$ y la recta L de ecuación $x - y = 1$. Hallar las coordenadas de B y la ecuación de la recta L con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{A; \{u, v\}\}$.

3. Hallar las ecuaciones implícitas de las siguientes variedades afines:

(i) El plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa contiene los puntos:

$$P_1 = (1,1,0), \quad P_2 = (0,1,1), \quad P_3 = (1,2,-1).$$

(ii) $L = P + W \subset \mathbb{R}^4$, donde $P = (1,-2,3,0)$ y $W = \mathcal{L}(\{u_1, u_2, u_3\})$ con $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (0,0,1,1)$ y $u_3 = (1,2,-1,0)$. Todo en el sistema de referencia canónico.

4^e. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín y $A, B \in \mathcal{A}$. Entonces $\vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

5. En el plano afín $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ se consideran las siguientes aplicaciones $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Deducir si son o no transformaciones afines, y en su caso afinidades (biyectivas):

(i) $f(x,y) = (x+1, y-1)$
(ii) $f(x,y) = (2x-1, 3y+2)$
(iii) $f(x,y) = (x^2+1, y)$
(iv) $f(x,y) = (2x, 2y)$
(v) $f(x,y) = (3x+1, 0)$

6. Sean $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ el plano afín, $\mathcal{R}$ el sistema de referencia afín canónico y $\mathcal{R}' = \{O'; \{u, v\}\}$ con $O' = (1,0)$ con respecto de $\mathcal{R}$, $u = (1,1), v = (1,-1)$. Calcular las expresiones matriciales de las transformaciones afines del ejercicio anterior en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

7. Sea f la transformación afín de $\mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial en el sistema de refencia afín canónico es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(i) Sea $\mathcal{R}' = \{O'; \{u_1, u_2, u_3\}\}$ un sistema de referencia dado por $O' = (-1,0,0)$, $u_1 = (2,-1,0)$, $u_2 = (2,0,-1)$, $u_3 = (1,-1,1)$. Hallar la expresión matricial de f en $\mathcal{R}'$.

(ii) Hallar los puntos fijos de f y determinar f.

8^e. Demostrar las siguientes afirmaciones :

(i) La composición de dos transformaciones afines es una transformación afín.

(ii) Una transformación afín f es inyectiva (respectivamente sobreyectiva) si, y sólo si, la aplicación lineal asociada $\vec{f}$ lo es.

(iii) Toda transformación afín f cuya aplicación lineal asociada es la identidad $\vec{f} = id_V$ es una traslación.

(iv) Toda transformación afín f cuya aplicación lineal asociada es un multiplo de la identidad $\vec{f} = \lambda id_V$ $(\lambda \neq 1)$ es una homotecia.

9. Estudiar los siguientes movimientos determinando los elementos geométricos correspondientes:

(i) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(viii) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

10. Calcular las ecuaciones de los siguientes movimientos:

(i) Giro de centro $P = (1, 2)$ y ángulo $\varphi = \pi/4$.

(ii) Simetría con respecto a la recta de ecuación $x + 2y = 4$.

(iii) Simetría deslizante de eje la recta $y = x - 2$ con vector de deslizamiento $(3, 3)$.

(iv) Simetría con respecto al plano que pasa por $(0, 1, 1)$ y es perpendicular al vector $(2, 1, 1)$.

(v) Giro de ángulo $\pi/2$ con respecto a la recta de ecuaciones $\{x = y\,,\ z = 0\}$.

(vi) Movimiento helicoidal que consiste en una rotación de $\pi/3$ alrededor de la recta de ecuaciones $\{x = 1\,,\ y = -1\}$ seguido de una translación de vector $(0, 0, 1)$.

11. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada respuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo). Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín sobre un K-espacio vectorial V.

(i) Para todo vector $v \in V$, existe una única pareja (P, Q) de puntos de $\mathcal{A}$ tal que $v = \overrightarrow{PQ}$.

(ii) Para todo vector $v \in V$, existe una pareja (P, Q) de puntos de $\mathcal{A}$ tal que $\overrightarrow{v} = \vec{PQ}$.

(iii) Para todo punto $P \in \mathcal{A}$ y todo vector $v \in V$, existe un único punto $Q \in \mathcal{A}$ tal que $v = \overrightarrow{PQ}$.

(iv) Para todo $P, Q \in \mathcal{A}$, existe un único vector $v \in V$ tal que $v = \overrightarrow{PQ}$.

(v) Para todo puntos $P, Q, R \in \mathcal{A}$ se tiene que $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}$.

(vi) Para todo punto $Q \in \mathcal{A}$ y todo vector $v \in V$, existe un único punto $P \in \mathcal{A}$ tal que $v = \overrightarrow{PQ}$.

(vii) Para todo puntos $P, Q \in \mathcal{A}$, existe un único punto $R \in \mathcal{A}$ tal que $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ}$.

(viii) Una transformación afín puede tener exactamente 2 puntos fijos distintos.