ÁLGEBRA 2 (25-3-2014)	**Grado en Físicas** **Curso 2013–14**	**Hoja** **C1**

Aplicaciones Ortogonales.

1. Sea $(V,\langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $f : V \longrightarrow V$ una aplicación tal que $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in V$. Demostrar que f es lineal. (Sugerencia: calcular $\|f(u+v)-f(u)-f(v)\|$ y $\|f(\alpha u)-\alpha f(u)\|$).

2. Sea $(V,\langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo, $f : V \longrightarrow V$ una aplicación ortogonal y W un subespacio de V invariante por f. Demostrar que W es también invariante por f^{-1} y que $W^{\perp}$ es invariante por f.

3. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo $(V,\langle\ \rangle)$ que cumple $\langle u + f(u), u - f(u)\rangle = 0$ para todo $u \in V$.

(i) Comprobar que f es ortogonal.

(ii) Supongamos que existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(u) + u$ es proporcional a v para todo $u \in V$. ¿Qué endormorfismo es f?

4^e. Sea $(V,\langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in V$ de norma 1. Sea $f : V \to V$ la aplicación lineal dada por $f(v) = v + \lambda\langle v, u\rangle u$ para cada $v \in V$.

(i) Hallar λ para que f sea una aplicación ortogonal.

(ii) ¿Qué endormorfismo es f en este caso?

5*. Sea f una aplicación ortogonal de un espacio vectorial euclídeo $(V,\langle\ \rangle)$. Demuestra que:

(i) $\mathrm{Ker}(id - f) = \big(\mathrm{Im}(id - f)\big)^{\perp}$.

(ii) $f^2 = -id \Longleftrightarrow \forall v \in V,\ f(v) \perp v \Longleftrightarrow \forall u, v \in V,\ \langle f(u), v\rangle = -\langle u, f(v)\rangle$.

6^e. Sea $V = M_n(\mathbb{R})$ con el producto escalar $\langle A, B\rangle = tr(A^tB)$. Sea $P \in O(n,\mathbb{R})$ una matriz ortogonal y $f_1, f_2 : V \to V$ las aplicaciones dadas por $f_1(A) = AP$ y $f_2(A) = P^{-1}AP$. Demostrar que f_1 y f_2 son ortogonales.

7°. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual. Determinar los endomorfismos ortogonales f de $\mathbb{R}^2$ que verifican:

$$(i)\ f^2 = id \qquad\qquad (ii)\ f^2 = -id.$$

8°. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal cuya matriz con respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ es

$$M_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & -2 \\ 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Determinar en qué caso f es ortogonal. En caso afirmativo si corresponde a un giro (en cuyo caso encontrar el ángulo de giro) o una simetría (en cuyo caso encontrar el eje de simetría).

9°. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal cuya matriz con respecto a la base canónica es M.

(i) Si $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ demostrar que f es la simetría (ortogonal) con respecto a la recta $ax + by = 0$, donde

$$\alpha = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-2ab}{b^2 + a^2}.$$

(ii) Encontrar la recta de simetría para $\alpha = 3/5$ y $\beta = -4/5$.

(iii) Encontrar la simetría con respecto a la recta $y = 0$.

10°. Hallar las matrices en la base canónica de las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^2$

(i) el giro que lleva el eje OX a la recta de ecuación $2x + y = 0$.

(ii) el giro que lleva la recta de ecuación $2x + y = 0$ al eje OX.

(iii) de la simetría (ortogonal) con respecto a la recta de ecuación $2x + y = 0$.

11. Sea $(V, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base ortonormal. Consideramos la aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ definida por:

$$3f(u_1) = 2u_1 - 2u_2 + u_3, \quad 3f(u_2) = \alpha u_1 + u_2 - 2u_3, \quad 3f(u_3) = \beta u_1 + \gamma u_2 + 2u_3.$$

Hallar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ de manera que f sea una aplicación ortogonal.

12°. Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual. Demostrar que los siguientes endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales y estudiar de qué tipo.

(i) El endomorfismo cuya matriz respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(ii) $f(x, y, z) = (z, x, y)$.

(iii) $f(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)$.

13°. Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual y tomamos la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ donde $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ y $u_3 = (1, 2, 0)$. Estudiar si son ortogonales los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ dados en esa base por las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

14°. Calcular la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de:

(i) la simetría con respecto al plano $x = y$.

(ii) la simetría con respecto al plano $2x + y + z = 0$.

(iii) el giro con respecto a la recta generada por $(1, 1, 1)$ de ángulo $\pi/6$.

(iv) el giro con respecto a la recta generada por $(1, 1, 1)$ y que lleve $(1, 0, -1)$ a $(0, 1, -1)$.

(v) el giro compuesto con simetría de recta invariante generada por $(1, 1, 1)$ y que lleve $(2, 1, 0)$ a $(-1, 0, -2)$.

15°. Determinar cuales de las siguiente aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ (con el producto escalar habitual) son ortogonales. En caso afirmativo clasificarlas geométricamente.

$$M_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad M_7 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$