ÁLGEBRA 2	**Grado en Físicas**	**Hoja**
(11-3-2014)	**Curso 2013–14**	**B1**

Formas bilineales y sesquilineales.

1°. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son formas bilineales de $\mathbb{R}^n$:

(i) $\phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1|y_1| + \cdots x_n|y_n|$.

(ii) $\phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = |x_1y_1 + \cdots x_ny_n|$.

(iii) $\phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{x_1^2y_1^2 + \cdots x_n^2y_n^2}$.

(iv) $\phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1y_1 + \cdots + x_ky_k$ para cada $k = 1, \dots, n$..

2°. Recordemos que dos matrices A y B son congruentes si existe una matriz invertible P tal que $B = P^tAP$. Demostrar que rango $A =$ rango B.

3°. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones $\phi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ son formas bilineales de $M_n(\mathbb{R})$:

(i) $\phi(A, B) = tr(A)tr(B)$.

(ii) $\phi(A, B) = tr(A^tB)$.

En caso afirmativo calcular su rango.

4°. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de un espacio vectorial V y sea ϕ la forma bilineal sobre V definida por $\phi(u, v) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2$ donde $u = (x_1, x_2, x_3)_\mathcal{B}$ y $v = (y_1, y_2, y_3)_\mathcal{B}$. Calcular

(i) la matriz de ϕ con respecto a la base $\mathcal{B}$.

(i) la matriz de ϕ con respecto a la base $\mathcal{B}'$, donde $e_1' = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2' = -e_2$ y $e_3' = e_1 - e_3$.

(i) $\phi(u, v)$ donde $u = 2e_1' + e_3'$ y $v = -e_2' + 2e_3'$.

5. De una forma bilineal ϕ del espacio $\mathbb{R}_1[x]$ se sabe que es simétrica y que $\phi(x+1, x+1) = 8$, $\phi(x+2, x+2) = 11$ y $\phi(x, x) = 3$. Calcular su matriz respecto de la base $\mathcal{B} = \{1, x\}$.

6. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal definida como

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 + 5x_2y_1 + \lambda x_2y_2.$$

Determinar λ para que ϕ sea degenerada.

7. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sean $f_1, \dots, f_k : V \longrightarrow \mathbb{R}$ formas lineales linealmente independientes y $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$, $1 \le i, j \le k$. Para $u, v \in V$ definimos

$$\phi(u, v) = \sum_{1 \le i,j \le k} \lambda_{i,j} f_i(u) f_j(v).$$

(i) Demuestra que ϕ es una forma bilineal simétrica si y sólo si $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$, para $1 \le i, j \le k$.

(ii) Demuestra que no toda forma bilineal se puede expresar de la forma anterior.

8^e. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, y $f, g : V \longrightarrow K$ aplicaciones lineales.

(i) Probar que la aplicación $\phi : V \times V \longrightarrow K$ definida por $\phi(u, v) = f(u)g(v)$ es una forma bilineal.

(ii) Calcular la matriz de ϕ para alguna base $\mathcal{B}$ de V.

(iii) Estudiar el rango de ϕ.

9. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\phi : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal. Diremos que ϕ es antisimétrica si $\phi(u, v) = -\phi(v, u)$. Demostrar que ϕ es antisimétrica si y sólo si $\phi(u, u) = 0$ para $u \in V$.

10. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ Se define la conjugada transpuesta de A como $A^* = \overline{A}^t$. Demostrar:

(i) $(AB)^* = B^*A^*$.

(ii) $A^{**} = A$.

(iii) $det(A^*) = \overline{det(A)}$.

(iv) $rango(A^*) = rango(A)$

11^e. Probar que el determinante de una matriz hermítica es un número real ¿Qué se puede decir del determinante de una matriz antihermítica?

12°. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada respuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo).

(i) Dos matrices simétricas reales de distinto rango no son congruentes.

(ii) Si una matriz simétrica real tiene traza nula, entonces no es congruente a la matriz identidad.

(iii) Dos matrices simétricas reales semejantes son también congruentes.

(iv) Hay matrices diagonalizables por congruencia que no son simétricas.

(v) Si dos matrices simétricas reales son congruentes, entonces son semejantes.