ÁLGEBRA 2

(12-2-2014)

Grado en Físicas
Curso 2013–14

Hoja A2

Forma de Jordan.

1°. Calcular la base de Jordan (real) y la forma de Jordan (real) para cada una de las siguientes matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Estudiar, según los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, la forma de Jordan (real) de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & a & 4-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3°. Sea $a \in \mathbb{R}$ y n un entero positivo. Demostrar las siguientes igualdades:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

4. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ y J su forma de Jordan (real). Determinar la forma de Jordan de $B = -A$.

5. Sea r_α la rotación de ángulo α en el plano $\mathbb{R}^2$ (resp. la rotación de ángulo α en el espacio $\mathbb{R}^3$ alrededor del eje Z). Estudiar para que ángulos $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) r_α es diagonalizable,

(ii) r_α tiene forma de Jordan,

(iii) r_α tiene forma de Jordan real.

En caso afirmativo, calcular la matriz diagonalizada, forma de Jordan o Jordan real respectivamente.

6. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y definamos los endomorfismos $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definido por $f(v) = Av^t$ y $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $g(v) = Av^t$.

(i) Demostrar que si $v = (z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio con valor propio $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ de f , entonces $\overline{v} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n) = (x_1 - iy_1, \ldots, x_n - iy_n)$ es vector propio de f de autovalor $\overline{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2$.

(ii) Sean $u_1 = (x_1, \ldots, x_n), u_2 = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que el subespacio vectorial $V = \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$ es invariante por el endomorfismo g. Demostrar que la matriz del endomorfismo g restringido a V respecto de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ es $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

7. Sea V un espacio vectorial y $f :: V \longrightarrow V$ un endomorfismo nilpotente, es decir, tal que $f^k = 0$ para algún entero $k \geq 1$. Demostrar que el único autovalor de f es 0, y su subespacio propio maximal es V, es decir, $M_0 = V$. Deducir que la traza de un endomorfismo nilpotente (y de todas sus potencias) es nula.

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, y sea f el endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b-1 \\ 1 & b & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Calcular a y b sabiendo que $Ker(f) = Im(f^2)$.

(ii) Calcular la forma de Jordan de f.

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión 3, y $f :: V \longrightarrow V$ un endomorfismo cuya imagen coincide con el núcleo de f^2. Demostrar que f es nilpotente, y que $dim(Ker(f)) = 1$. Usar esto para obtener la forma de Jordan de f.

10. Un endomorfismo f de $V = \mathbb{C}^3$ que no es diagonalizable cumple $(f - \lambda id_V)^2 = 0$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C}$. Demostrar que λ es el único autovalor de f y calcular su forma de Jordan.

11. ¿Qué condiciones deben cumplir los números complejos a, b y c para que las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 0 & 1 & a^2b \\ 0 & a(1+b) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sean semejantes?

12. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada respuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo).

(i) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que $f^3 = f^2 \neq 0$. Entonces f tiene infinitas rectas invariantes.

(ii) Dos matrices de $M_2(\mathbb{R})$ con la misma traza y el mismo determinante son semejantes.

(iii) Dos endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ con las mismas rectas invariantes y los mismos autovalores tienen la misma forma de Jordan real.

(iv) Si A y M son matrices cuadradas cuyos cuadrados son semejantes, también A y M son semejantes.

(v) Dos endomorfismos con los mismos autovalores, el mismo núcleo y la misma imagen, tiene matrices semejantes.

(vi) Dos matrices reales que tienen la misma forma de Jordan real pueden tener distinta forma de Jordan compleja.