ÁLGEBRA 2 (6-2-2014)	Grado en Físicas Curso 2013–14	Hoja A1

Diagonalización de endomorfismos.

1°. Dados los siguientes endomorfismos

$$\begin{array}{ll}
f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, & f_1(x,y) = (y,x), \\
f_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, & f_2(x,y) = (y,-x), \\
f_3 : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2, & f_3(x,y) = (x-y/2, y-2x), \\
f_4 : \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2^2, & f_4(x,y) = (x, x+y), \\
f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, & f_5(x,y,z) = (3y+9z, x/3+5z, x/9+y/3), \\
f_6 : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3, & f_6(x,y,z) = (6x-7y-20z, -8z, x-y), \\
f_7 : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, & f_7(x,y,z) = (2x+y+z, 2x+3y+2z, 4x+4y+3z), \\
f_8 : \mathbb{F}_2^3 \longrightarrow \mathbb{F}_2^3, & f_8(x,y,z) = (x+y, x+z, y+z), \\
f_9 : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x], & f_9(p(x)) = p'(x), \\
f_{10} : M_2(\mathbb{F}_2) \longrightarrow M_2(\mathbb{F}_2), & f_{10}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a+b+d & b+c+d \end{pmatrix}, \\
f_{11} :: W \longrightarrow W, & f_{11}(x,y,z) = (3x+y, 2z, y-x), \quad \text{donde } W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}.
\end{array}$$

Se pide para cada endomorfismo lo siguiente:

(i) Calcular los autovalores y autovectores.

(ii) Estudiar si es diagonalizable o no sobre el cuerpo base.

(iii) En caso de que sea diagonalizable:

1. Encontrar una base $\mathcal{B}$ formada por autovectores.
2. Escribir la matriz diagonal D del endomorfismo con respecto a $\mathcal{B}$.
3. Dar explícitamente la relación entre la matriz D y la matriz del endomorfismo que hayas utilizado para calcular el polinomio característico.

2°. Determinar en cada caso en el que sea posible una base de $\mathbb{R}^n$ (o de $\mathbb{C}^n$) en la que las matrices dadas a continuación diagonalicen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, A_9 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3°. Dadas las matrices de $M_3(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

(i) Demostrar que ambas tiene los mismos autovalores.

(ii) ¿Pueden representar el mismo endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, quizás en bases distintas?

4. Estudiar según los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ la diagonalización de los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canónica, tienen las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

5°. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcula:

(i) A_k^{10} para $k = 1, 2$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} A_k^n$ para $k = 1, 2$.

6. Sea V un K-espacio de dimensión n, $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V, A la matriz de f con respecto a alguna base de V y $p_f(x) = det(A - xI_n)$ el polinomio característico de f. Entonces

(i) $p_f(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} traza(A) x^{n-1} + \cdots + det(A)$, donde $traza(A)$ es la suma de los elementos de la diagonal de A.

(ii) Demostrar que si B es otra matriz de f con respecto a otra base de V, entonces $traza(B) = traza(A)$, y por lo tanto podemos definir $traza(f) = traza(A)$ que no depende de la matriz elegida.

7. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes en un cuerpo K. Demuestra que A y A^t tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos autovalores (en K o en "el cierre algebraico de K").

8°. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo diagonalizable. Demuestra que $V = Ker(f) \oplus Im(f)$.

9. Si A es una matriz triangular de orden n cuyos elementos de la diagonal principal son todos diferentes, probar que A es diagonalizable.

10. Sea r_α la rotación de ángulo α en el plano. Estudiar para qué ángulos $\alpha \in \mathbb{R}$, r_α es diagonalizable.

11. Sea R_α la rotación de ángulo α, en el espacio $\mathbb{R}^3$, alrededor del eje Z. Estudiar para qué ángulos $\alpha \in \mathbb{R}$, R_α es diagonalizable.

12. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Sea k un entero positivo. Demuestra que si v es un autovector de f, también lo es de f^k. Además si $\mathcal{B}$ es una base de V formada por autovectores de f, entonces $\mathcal{B}$ diagonaliza también a f^k.

13. Sean $\alpha, \beta \in R$ y las matrices de $M_2(\mathbb{R})$ siguientes

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \alpha^2 + \beta^2 = \alpha.$$

Hallar sus autovalores y autovectores. ¿Existe alguna interpretación geométrica de las aplicaciones asociada a estas matrices?

14°. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Demuestra:

(i) f es biyectiva si y sólo si 0 no es valor propio de f.

(ii) λ es valor propio de f si y sólo si $-\lambda$ es valor propio de $-f$.

(iii) Si f es biyectiva y λ es valor propio de f, entonces λ^{-1} es valor propio de f^{-1}.

(iv) Si $f^2 = f$, entonces $\{$valores propios de $f\} \subset \{0, 1\}$.

(v) Si $f^2 = f$ y f es biyectiva, entonces 1 es el único valor propio de f.

(vi) Si $f^2 = 0$, entonces 0 es el único valor propio de f.

(vii) Si $f^2 = id$, entonces $\{$valores propios de $f\} \subset \{1, -1\}$.

15. Sea A una matriz de $M_n(K)$. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada respuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo).

(i) Los valores propios de A están en su diagonal.

(ii) Si existe una base de K^n de vectores propios de A, entonces A es diagonalizable.

(iii) Si A es diagonalizable, entonces A tiene n valores propios distintos.

(iv) Si A es diagonalizable e invertible, entonces A^{-1} también es diagonalizable.

16*. Sean $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $W_1 \oplus W_2 = V$. Si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, definimos las funciones

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & V & \longrightarrow & V \\ & u & \mapsto & \pi_1(u) = v_1 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rccc} s : & V & \longrightarrow & V \\ & u & \mapsto & s(u) = v1 - v2 \end{array}$$

(i) Demuestra que π_1 y s son lineales y que $\pi_1^2 = \pi_1$ y $s^2 = id$.

(ii) Si $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ son bases de W_1 y W_2 respectivamente escribe la matriz de π_1 y de s respecto a la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

(iii) Si la suma $V_1 + V_2$ no fuera directa: ¿se podrían definir las aplicaciones π_1 y s de manera similar?

17*. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Se dice que un endomorfismo $s : V \longrightarrow V$ es una simetría si $s^2 = id_V$ y que $\pi : V \longrightarrow V$ es una proyección si $\pi^2 = \pi$. Se pide:

(i) Demostrar que s y π son diagonalizables.

(ii) Demostrar que para s (resp. π) existen $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $W_1 \oplus W_2 = V$. Así, si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, entonces $s(u) = v1 - v2$ (resp. $\pi_1(u) = v_1$). Observar que W_1 y W_2 dependen de s y π.

18. Llamaremos *matriz estocástica* a una matriz cuadrada $M = (p_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ con coeficientes $p_{i,j} \geq 0$ y tal que la suma de los elementos de cada columna es 1, es decir $\sum_{i=1}^n p_{i,j} = 1$ para cada $j = 1, \dots, n$ (observa que esto implica $1 \geq p_{i,j} \geq 0$). Por otra parte, dado un vector $v = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{C}^n$ definimos la *norma infinito de* v como

$$\|v\|_\infty := \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \cdots, n\}.$$

Si M es una matriz estocástica, demuestra:

(i) 1 es autovalor de M

(ii) Para cualquier $v \in \mathbb{C}^n$, se tiene $\|M^t v\|_\infty \leq \|v\|_\infty$. (OJO: aquí la matriz es M^t, que es "estocástica por filas".)

(iii) Cualquier autovalor, real o complejo, λ de M^t satisface $\|\lambda\| \leq 1$.

(iv) Cualquier autovalor, real o complejo, λ de M satisface $\|\lambda\| \leq 1$.

(v) $(1, \dots, 1)$ es autovector de M^t, ¿para qué autovalor? ¿Es $(1, \dots, 1)$ necesariamente autovector de M?

19°. Supongamos que tenemos dos depósitos de igual volumen con agua comunicados por un doble conducto por el que circula el agua como sigue:

NaCl	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	NaCl

Inicialmente, en el primer depósito hay NaCl disuelto al 1 %, y en el segundo hay NaCl disuleto al 2 %. Cada minuto pasa un 5 % del volumen del primer depósito al segundo y viceversa. Decide de manera razonada la concentración de NaCl que habrá en cada uno de los depósitos después de 120 minutos. ¿Qué prevés que suceda a largo plazo?

20°. Diagonalizar en una base ortonormal los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ dados en la base canónica por las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 8 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$