ÁLGEBRA 2

(Examen Extraordinario)

Grado en Físicas
Curso 2013–14

Examen
25-6-2014

Apellidos, Nombre: ____

Razonar debidamente las respuestas	⋄ ⋄ ⋄	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	FINAL
		2 puntos	3 puntos	2.5 puntos	2.5 puntos	10

---

1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matriz no nula cuyo polinomio característico es $p_A(x) = -x^3$. Entonces A no puede ser diagonalizable.

(ii) Sean las formas cuadráticas de $\mathbb{R}^3$ definidas con respecto a la base canónica por:

$$Q_1(x,y,z) = -x^2 - 2xy - 2xz - 2yz,$$
$$Q_2(x,y,z) = x^2 + 2xy - y^2 + 2xz + 2yz + 2z^2.$$

Se tiene que ambas no son definidas positivas pero diagonalizan simultaneamente con respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1)\}$.

---

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Demuestra que el polinomio característico de A es $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

(ii) Calcula los autovalores de A y para cada uno de ellos calcula una base del correspondiente subespacio propio.

(iii) Determina si A es diagonalizable o no.

(iv) Determina la forma canónica de Jordan J de A.

(v) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto a la cual el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por A tenga matriz de Jordan J y una matriz P tal que $AP = PJ$. ¿Qué representa la matriz P?

---

3. Dada la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que tiene la expresión en la base canónica siguiente:

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2xz + 6yz - z^2.$$

Se pide:

(i) Encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ en la que Q diagonalice.

(ii) Hallar los índices de inercia positivo y negativo, y la signatura de Q.

(iii) Decidir si es o no definida positiva o definida negativa.

---

4. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ (con el producto escalar usual), definimos la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}_c = \{(0,0,0); \mathcal{B}_c\}$ (donde $\mathcal{B}_c$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$) es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(i) Calcular la matriz respecto de la base canónica de la aplicación lineal $\overrightarrow{f}$.

(ii) Determinar si $\overrightarrow{f}$ es una aplicación ortogonal o no. En caso afirmativo, clasificarla geométricamente.

(iii) Demostrar que f es un movimiento y clasificarlo encontrando sus elementos geométricos.