ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Examen
14-1-2013

Grupo
71_

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	FINAL
3 puntos	2 puntos	3 puntos	2 puntos	10

⋄⋄⋄⋄⋄⋄ Razonar debídamente las respuestas ⋄⋄⋄⋄⋄⋄

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial V. Para $k \in \mathbb{Q}$ consideremos:

$$u_1 = -v_1 + v_2 + kv_3, \qquad u_2 = v_1 + kv_2 + v_3, \qquad u_3 = kv_1 - v_2 - v_3.$$

Si $k \neq 0, 1$ se tiene que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es un sistema de generadores de V.

(ii) Sea $D = \langle 1 + x + x^2 \rangle_{\mathbb{R}}$ el subespacio de $\mathbb{R}_2[x]$. Escribimos $[p(x)]$ para la clase de $p(x)$ en $\mathbb{R}_2[x]/D$. Las clases $[1], [x]$ forman una base de $\mathbb{R}_2[x]/D$ y la clase de $1 + 2x + 3x^2$ se escribe con respecto a esta base como $[1 + 2x + 3x^2] = -2[1] - [x]$.

(iii) Sean $u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (1, 0, 3), u_3 = (0, 1, 5) \in \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Entonces la base dual $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$ esta definida por las siguientes formas lineales

$$u_1^*(x, y, z) = 3x + 5y - z, \quad u_2^*(x, y, z) = -2x - 5y, \quad \text{y} \quad u_3^*(x, y, z) = y.$$

Problema 2. Sea $F : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación definida por $F(p(x)) = p(1)(x + 1) + p''(x)$.

(i) Demuestra que F es lineal y calcula su matriz con respecto a la base estándar de $\mathbb{R}_3[x]$.

(ii) Encuentra bases de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

(iii) Encuentra una base de $Ker(f) \cap Im(f)$ y, sin calcular explícitamente $Ker(f) + Im(f)$, decide si $\mathbb{R}_3[x] = Ker(f) + Im(f)$.

(iv) Encuentra ahora una base de $Ker(f) + Im(f)$.

Problema 3. Consideramos la matriz con coeficientes racionales

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Calcula el polinomio característico de A. [Indicación: -1 es una raíz.]

(ii) Calcula los autovalores y autovectores de A.

(iii) Determina si A es diagonalizable o no.

(iv) Determina la forma canónica de Jordan J de A.

v) Si J tiene coeficientes racionales, encuentra una base de $\mathbb{Q}^3$ respecto a la cual el endomorfismo de $\mathbb{Q}^3$ definido por A tenga matriz de Jordan J y una matriz P tal que $AP = PJ$.

(iv) Calcula el polinomio mínimo de A.

Problema 4. Sea V un K-espacio vectorial. Diremos que un endomorfismo $p : V \longrightarrow V$ es un *proyector* si $p \circ p = p$. Sea $p : V \longrightarrow V$ un proyector e $I : V \longrightarrow V$ el endomorfismo identidad. Demuestra que:

(i) $I - p$ es también un proyector.

(ii) $Ker(p) \cap Im(p) = 0$.

(iii) $Ker(p) = Im(I - p)$. [Sugerencia: $v = v - p(v) + p(v)$.]

(iv) $V = Ker(p) \oplus Im(p)$.