

## Forma canónica de Jordan. Aplicaciones.

1. Determinar la matriz de Jordan (sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  en el que el polinomio característico descomponga en factores lineales) de las siguientes matrices, dando en cada caso la base de Jordan y el polinomio mínimo.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & A_3 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 A_4 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, & A_5 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, & A_6 &= \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 & 3 \\ -4 & 2 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\
 A_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, & A_8 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, & A_9 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2. Encuentra todas las posibles formas de Jordan (que representen endomorfismos distintos de  $\mathbb{R}^n$ ) para matrices  $A$  de tamaño  $n \times n$  que satisfagan las condiciones indicadas ( $p_A(x)$  es el polinomio característico y  $m_A(x)$  el polinomio mínimo).

- (i)  $p_A(x) = (x-1)^3(x-2)^3(x-3)^3, m_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ ;
- (ii)  $p_A(x) = m_A(x) = (x-1)^4(x-2)^2$ ;
- (iii)  $p_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ ;
- (iv)  $n = 6, m_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)$ ;
- (v)  $n = 3, (A-I)(A-2I)(A-3I) = 0$ .

3. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo diagonalizable. Demuestra que  $V = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

4. Sea  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo de un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ . Diremos que  $f$  es nilpotente si existe un entero  $k \geq 1$  tal que  $f^k = 0$ . Llamaremos  $G(f) = \min\{k \geq 1 \mid f^k = 0\}$ .

- (i) Demuestra que  $G(f) \leq n$ .
- (ii) Demuestra que si  $f$  es nilpotente y  $G(f) = n = \dim(V)$ , entonces existe una base de Jordan  $\mathcal{B}_J$  de  $V$  tal que la matriz de  $f$  en esa base es un bloque de Jordan de orden  $n$  y autovalor 0, es decir:

$$M_{\mathcal{B}_J}(f) = J(0, n).$$

(iii) ¿Qué nos dice en general  $G(f)$  sobre la forma de Jordan de  $f$ ?

5. Sea  $J = J(\lambda, n)$  un bloque de Jordan de orden  $n$  y autovalor  $\lambda$ .

- (i) Demostrar que para  $k = 1, \dots, n$  se tiene, para matrices  $\mathbf{0}$  de tamaños adecuados,

$$J^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

(Sugerencia:  $J = \lambda I_n + N_n$  donde  $N_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  y usar el binomio de Newton viendo que  $I_n$  y  $N_n$  conmutan).

- (ii) Determinar el menor entero  $k$  tal que  $(J - \lambda I_n)^k = \mathbf{0}$ .

6. Definimos la exponencial de una matriz real, suponiendo que las series involucradas convergen, como

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

(i) Comprueba que  $\exp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$ .

(ii) Calcula  $\exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  y  $\exp \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ .

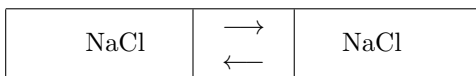
(iii) Encuentra cambios de base que permitan escribir las aplicaciones lineales dadas por las matrices  $A = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  en una de las formas indicadas en (ii); utiliza esto para calcular  $\exp(A)$  y  $\exp(B)$ .

7. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Se dice que un endomorfismo  $s : V \rightarrow V$  es una simetría si  $s^2 = id_V$  y que  $\pi : V \rightarrow V$  es una proyección si  $\pi^2 = \pi$ . Se pide:

- (i) Decidir de manera razonada cómo son los polinomios mínimos de  $s$  y de  $\pi$ .
- (ii) Usando el apartado anterior, demostrar que  $s$  y  $\pi$  son diagonalizables.
- (iii) Demostrar que para  $s$  (resp.  $\pi$ ) existen  $W_1, W_2 \subset V$  dos subespacios vectoriales de modo que  $W_1 \oplus W_2 = V$ . Así, si  $u = v_1 + v_2$  con  $v_1 \in W_1$  y  $v_2 \in W_2$ , entonces  $s(u) = v_1 - v_2$  (resp.  $\pi_1(u) = v_1$ ). Observar que  $W_1$  y  $W_2$  dependen de  $s$  y  $\pi$ .

8. En un bosque maderero, los árboles están clasificados en dos tamaños. Un censo que se hace cada 5 años reclasifica un 30 % de los árboles de tamaño menor, que pasan a ser de tamaño grande. Entre cada dos censos se corta un 10 % de los árboles de tamaño grande y se repuebla con el mismo número de árboles de tamaño pequeño. ¿Aumenta el número de árboles con el tiempo? Si inicialmente había 1000 árboles de tamaño pequeño y ninguno grande, ¿cuántos árboles de tamaño grande hay a los 20 años? (**Sugerencia:** si  $x_n$  (resp.  $y_n$ ) representa el número de árboles pequeños (resp. grandes) después de  $n$  períodos de 5 años, se tiene  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$  para una cierta matriz  $A$  que convendrá diagonalizar).

9. Supongamos que tenemos dos depósitos de igual volumen con agua comunicados por un doble conducto por el que circula el agua como sigue:



Inicialmente, en el primer depósito hay NaCl disuelto al 1 %, y en el segundo hay NaCl disuelto al 2 %. Cada minuto pasa un 5 % del volumen del primer depósito al segundo y viceversa. Decide de manera razonada la concentración de NaCl que habrá en cada uno de los depósitos después de 120 minutos. ¿Qué prevés que suceda a largo plazo?

10. Los *dusky-footed wood rats* son un tipo de roedor común en los bosques de California, cuyo depredador natural es el buho moteado. Denotamos por  $O_k$  la población de búhos después de  $k$  meses y por  $R_k$  la población de roedores después de  $k$ -meses. Supongamos que

$$\begin{aligned} O_{k+1} &= 0,5O_k + 0,4R_k \\ R_{k+1} &= -pO_k + 1,1R_k \end{aligned}$$

donde  $p$  es una constante positiva. El sumando  $0,5O_k$  indica que si no hay roedores, la tasa de supervivencia de los búhos es del 50 % al mes, mientras que el sumando  $1,1R_k$  nos dice que en ausencia de búhos, los roedores crecerían a un ritmo del 10 % al mes. El término  $0,4R_k$  indica el crecimiento de los búhos en presencia de los roedores, y el término  $-pO_k$  mide la desaparición de roedores debido a la caza por parte de los búhos.

- (i) Determina la evolución de las dos poblaciones a largo plazo si  $p = 0,104$ .
- (ii) Determina la evolución de las dos poblaciones a largo plazo si  $p = 0,2$ . ¿Crece la población de búhos? ¿Y la de roedores?
- (iii) Determina un valor de  $p$  para el que el número de individuos de ambas poblaciones se estabilice a largo plazo. ¿Cuál será entonces la proporción entre ambas poblaciones? Se puede probar que este *equilibrio* entre ambas poblaciones es inestable (cualquier cambio menor en alguno de los datos provoca decrecimiento o crecimiento de ambas poblaciones a largo plazo).