ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Hoja nº 7

Determinantes.

1. Sea A una matriz cuadrada cuyo deteminante vale 9. Determinar, si es posible, el determinante de las matrices A^5, A^{-1} y $7A$.

2. Demuestra, sin calcularlos, que los siguientes determinantes son nulos (en algún caso conviene hacer alguna transformación).

$$(i)\ \begin{vmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{vmatrix}, \qquad (ii)\ \begin{vmatrix} sen^2 a & 1 & cos^2 a \\ sen^2 b & 1 & cos^2 b \\ sen^2 c & 1 & cos^2 c \end{vmatrix}, \qquad (iii)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \qquad (iv)\ \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}.$$

3. Determinante de Vandermonde:
Sean $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$, demostrar la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & ... & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ .. & .. & .. & .. \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

(Sugerencia: Razonar por inducción. Empezar restando a cada columna la anterior multiplicada por x_1)

4. Sea A la matriz cuadrada definida por $a_{ij} = |i-j|$. Demostrar $|A| = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.
(Sugerencia: Empezar restando a cada columna la anterior.)

5. Demostrar

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 2 & 4 & 4 & .. & n-1 & n \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n+1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)+2}{2}$$

(Sugerencia: sumar primero todas las columnas.)

6. Demuestra que $(x-1)^3$ divide al polinomio $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$.

7. Sabiendo que $58786, 30628, 12831, 80743$ y 16016 son divisibles por 13, demostrar que

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

es también divisible por 13.

8. Calcula utilizando menores el rango de la matriz con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & a-2 & 4 & a \\ 1 & a-1 & 2 & a^2 \end{pmatrix}.$$

9. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ definida como

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}$$

(i) Calcular la matriz de f respecto de la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Calcular la matriz de f respecto a la siguiente base de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Calcular los determinantes de las matrices halladas en los apartados (i) y (ii).

10. Calcula el determinante de los siguientes endomorfismos:

(i) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z - \overline{z}$, donde si $z = x + iy, \overline{z} = x - iy$ es su conjugado, y vemos $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (OBSERVACION: f es $\mathbb{R}$-lineal, luego la pregunta tiene sentido).

(ii) $g : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $f(z_1, z_2) = (z_1 + z_2, z_1 + iz_2)$ visto como un homomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales y también visto como un homomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

(iii) Consideramos el subespacio $E =< sen(x), cos(x) >$ del $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Calcula el determinante del endomorfismo de E definido por la derivación.

11. Sea $f : M_{2\times3}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{2\times3}(\mathbb{C})$ el endomorfismo definido por

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 4c \\ 3a' & 3b' & 4c' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \in M_{2\times3}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{c} a+b=0 \\ a'+b'=0 \\ c+c'=0 \end{array} \right\}.$$

(i) Demostrar que f induce un endomorfismo $f_{|W} : W \longrightarrow W$ definido por la misma fórmula que f. Calcular su determinante.

(ii) Probar que f induce también un endomorfismo $\overline{f}$ del espacio cociente $M_{2\times3}(\mathbb{C})/W$. Calcular su determinante.

(iii) Relacionar los determinantes de f, $\overline{f}$ y $f_{|W}$.

12. Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en K.

(i) Prueba que $det(-A) = (-1)^n det(A)$.

(ii) Sea $adj(A)$ la matriz adjunta, es decir, la que tiene como coeficientes los adjuntos de los coeficientes de A. Demuestra que $|adj(A)| = |A|^{n-1}$. (Sugerencia: recuerda cuanto vale $A \cdot adj(A)^t$.)

(iii) Diremos que A es *hemisimétrica* si $a_{ij} = -a_{ji}$ para cualesquiera i, j (piensa qué quiere decir esto para los coeficientes de la diagonal de A). Demuestra que si A es hemisimétrica entonces $det(A) = (-1)^n det(A)$. Concluye que si A es hemisimétrica y n es impar, entonces $det(A) = 0$.

13. Resolver usando la Regla de Cramer::

$$\text{(i)} \begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} 3x + 2y + 4z + t = 1 \\ 2x - y + z - 3t = 6 \\ x + 2y + 3z - t = 1. \end{cases}$$