ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Hoja nº 5

Aplicaciones Lineales.

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales y, en caso afirmativo, calcular su matriz con respecto a las bases canónicas en el caso en el que tanto el espacio de salida como de llegada sean de dimensión finita.

(i)	$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,	$f(x,y)=(2x,y-x)$	(ii)	$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,	$f(x,y)=(y,x)$
(iii)	$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,	$f(x,y)=xy$	(iv)	$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,	$f(x,y)=(\sin x,y)$
(v)	$f:\mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$,	$f(x,y)=(xy,x)$	(vi)	$f:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$,	$f(x)=(2x,0)$
(vii)	$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,	$f(x,y,z)=e^{x+y+z}$	(viii)	$f:\mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$,	$f(x,y)=x+y$
(ix)	$f:\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}^3$,	$f(x)=(2x,0,x/2)$	(x)	$d:\mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$,	$d(p(x))=p'(x)$
(xi)	$f:\mathbb{Q}^2 \longrightarrow M_2(\mathbb{Q})$,	$f(x,y)=\begin{pmatrix} 5x & 0 \\ x-3y & x \end{pmatrix}$	(xii)	$f:M_n(\mathbb{F}_2) \longrightarrow M_n(\mathbb{F}_2)$,	$f(A)=A^t$

(xiii) $I:\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ continua}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad I(f)=\int_0^1 f(x)dx$

(xiv) $J:\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ derivable}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad J(f)=(f'(-1),f(2)+f'(0))$

2. (i) Halla $T(1,0)$ si $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal para la que sabemos que $T(3,1)=(1,2)$ y $T(-1,0)=(1,1)$.

(ii) Lo mismo sabiendo que $T(4,1)=(1,1)$ y $T(1,1)=(3,-2)$.

3. Decidir en cada caso si existe una aplicación lineal con las propiedades que se indican. En caso afirmativo dar la matriz con respecto a las bases canónicas.

(i) $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad T(1,-1,1)=(1,0)$ y $T(1,1,1)=(0,1)$.

(ii) $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad T(1,1)=(1,0)$, $T(2,-1)=(0,1)$ y $T(-3,2)=(1,1)$.

4. Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_3,x_2,x_3-x_1,x_3)$. Determinar la imagen por T del plano $x_1+x_2+x_3=0$.

5. Sea $f:M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación definida por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a-b)x^2+(c+d)x$.

(i) Demostrar que f es lineal.

(ii) Hallar la matriz de f respecto a la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$ y la base $\{x^2+1,x^2+3x,5\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

6. Sean $f:M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ y $g:M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales definidas por:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ c-d & 5a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a+b,-c,d-a)$$

(i) Hallar las matrices de f y g respecto a las bases canónicas.

(ii) Comprobar que $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$. Hallar la matriz de f y las coordenadas de $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

(iii) Hallar la matriz de g respecto a la base $\mathcal{B}$ en $M_2(\mathbb{R})$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Hallar la matriz de $g\circ f$ respecto a las bases canónica y respecto la base $\mathcal{B}$ en $M_2(\mathbb{R})$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(v) Calcular la matriz de cambio de base entre $\mathcal{B}$ y la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

(vi) Relacionar las diferentes matrices obtenidas.

7. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(-1,1,1),(1,-1,0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{(2,1,1),(1,1,1),(1,-1,1)\}.$$

(i) Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

(ii) Calcular las coordenadas en la base $\mathcal{B}_1$ del vector cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$ son $(3,-2,1)$.

8. Sea $f : M_2(\mathbb{Q}) \longrightarrow M_2(\mathbb{Q})$ la aplicación lineal dada por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}$$

(i) Encontrar la matriz de f respecto de la base canónica (tanto en el espacio de partida como en el de llegada).

(ii) Sea A la matriz de f respecto de la base canónica de salida y la base $\mathcal{B}$ de llegada , donde $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Calcular $A \cdot v^t$, donde $v = (1,1,2,1)$.

(iv) Encontrar las coordenadas del vector $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{B}$.

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$T(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$

(i) Hallar la matriz de T en la base canónica y la matriz de T respecto a la base $\{(1,0,1),(-1,2,1),(2,1,1)\}$.

(ii) Demostrar que T es un isomorfismo y dar una expresión para T^{-1}.

10. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V. Demostrar:

(i) Los vectores $u_1 = v_1 + v_2, u_2 = v_2 + v_3$ y $u_3 = v_3 + v_1$ son linealmente independientes.

(ii) Los vectores $w_1 = v_1, w_2 = v_1 + v_2$ y $w_3 = v_1 + v_2 + v_3$ son linealmente independientes.

(iii) Tres vectores cualesquiera u_1, u_2, u_3 del subespacio $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son independientes si y sólo si sus coordenadas respecto a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ son vectores independientes de $\mathbb{R}^3$.
(Sugerencia: escribir la matriz del endomorfismo $f : W \to W$ caracterizado por $f(v_i) = u_i, i = 1,2,3$ y deducir que f es un isomorfismo).

11. Sean $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $W_1 \oplus W_2 = V$. Si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, definimos las funciones

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & V & \longrightarrow & V \\ & u & \mapsto & \pi_1(u) = v_1 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rccc} s : & V & \longrightarrow & V \\ & u & \mapsto & s(u) = v1 - v2 \end{array}$$

(i) Demuestra que π_1 y s son lineales y que $\pi_1^2 = \pi_1$ y $s^2 = id$.

(ii) Si $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ son bases de W_1 y W_2 respectivamente escribe la matriz de π_1 y de s respecto a la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

(iii) Si la suma $V_1 + V_2$ no fuera directa: ¿se podrían definir las aplicaciones π_1 y s de manera similar?