

Espacios vectoriales.

1. Demostrar que $\mathbb{R}^3 = \langle (1, 1, 0) \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle (1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 2) \rangle_{\mathbb{R}}$.
2. Encontrar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbb{R}^3 = \langle (1, -1, 1), (0, 2, -2) \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$.
3. Calcular la dimensión y una base de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$, discutir si W_2 es un complementario de W_1 y comprobar que se verifica la fórmula de Grassmann en cada uno de los siguientes casos:

- (i) $W_1 = \langle (1, 1, -1), (2, 0, -1) \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3$,
 $W_2 = \langle (1, 0, -1), (2, 3, 0), (4, 3, -2) \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3$.
- (ii) $W_1 = \langle (0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle_{\mathbb{F}_2} \subset \mathbb{F}_2^4$,
 $W_2 = \langle (1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle_{\mathbb{F}_2} \subset \mathbb{F}_2^4$.
- (iii) $W_1 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y + 2z + 2u = 0, 3y + 3z - t + 2u = 0\} \subset \mathbb{R}^5$,
 $W_2 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x - y + t = 0, 3x - z + t - 4u = 0\} \subset \mathbb{R}^5$.
- (iv) $W_1 = \langle (1, 0, 3, 1), (-4, 3, -3, -7), (2, -1, 3, 3), (3, -2, 3, 5) \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}^4$,
 $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x + 2y - z - t = 0\} \subset \mathbb{Q}^4$.
- (v) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$,
 $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1/2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} \subset M_2(\mathbb{C})$.

4. Sea W_1, W_2, W_3 subespacios vectoriales de \mathbb{R}^5 de dimensión 2. Calcular la dimensión de $W_2 + W_3$ sabiendo que $W_2 \neq W_3$ y que $W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$.

5. Sea K un cuerpo y $W \subset K^n$ un subespacio vectorial. Definimos el subespacio ortogonal a W como:

$$W^\perp = \{u \in K^n \mid u \cdot v^t = 0, \forall v \in W\}.$$

Demostrar:

- W^\perp es un subespacio vectorial de K^n .
- Sean $u_1, \dots, u_m \in W$ un sistema de generadores de W y A la matriz que tiene estos vectores por filas, entonces $W^\perp = \{u \in K^n \mid A \cdot u^t = 0\}$.
- $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$.
- $K^n = W \oplus W^\perp$.
- $(W^\perp)^\perp = W$.
- Sea $V \subset K^n$ otro subespacio vectorial. Entonces

$$(W \cap V)^\perp = W^\perp + V^\perp \quad \text{y} \quad (W + V)^\perp = W^\perp \cap V^\perp.$$

- Cualquier subespacio vectorial de K^n es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con n variables.

6. Sea $W = \langle (1, 2, -1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Describe W como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

7. Demuestra que los siguientes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ se pueden describir como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas y encuentra dichas ecuaciones.

(i) $V_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A \text{ es diagonal}\}$.

(ii) $V_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$.

8. Sea W el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por $(1, 2, -5, 3)$ y $(2, -1, 4, 7)$. Da las ecuaciones de W .

9. Consideremos en \mathbb{R}^4 los subespacios vectoriales $W_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $W_2 = \langle v_4, v_5 \rangle$ con

$$v_1 = (1, -2, -1, 3), v_2 = (0, 2, 1, -1), v_3 = (-2, 6, 3, -7), v_4 = (1, 2, 1, 1), v_5 = (2, 0, -1, 1).$$

Da las ecuaciones de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

10. Sea $\mathbb{R}_3[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, y considera el subespacio $W = \{(a - b) + 2ax + bx^2 + (a + 2b)x^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$. Da las ecuaciones de W y las de un complementario.

11. Dados los subespacios vectoriales $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ definidos por

$$W_1 = \{(x_1 + 5x_2, x_2 + 3x_3, -x_4, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\},$$

$$W_2 = \langle (0, 0, 1, 0), (6, 4, 0, 0) \rangle_{\mathbb{R}},$$

se pide calcular una base y la dimensión de los siguientes espacios vectoriales cociente:

$$\mathbb{R}^4/(W_1 \cap W_2), \quad \mathbb{R}^4/(W_1 + W_2), \quad \mathbb{R}^4/W_1, \quad (W_1 + W_2)/(W_1 \cap W_2).$$

12. Sea W el subespacio de \mathbb{R}^4 definido por

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, z + t = 0\}.$$

Calcular una base del espacio vectorial cociente \mathbb{R}^4/W y encontrar las coordenadas de los vectores

$$[(2, -2, 0, 0)] \quad \text{y} \quad [(3, 4, 0, 0)] \in \mathbb{R}^4/W$$

en dicha base.

13. Sea W el subespacio vectorial de $M_{2 \times 3}(\mathbb{Q})$ definido por

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array} \right) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{Q}) \mid \begin{array}{l} a + b = 0 \\ a' + b' = 0 \\ c + c' = 0 \end{array} \right\}$$

Encontrar una base de $M_{2 \times 3}(\mathbb{Q})/W$ y las coordenadas del vector $[v]$, con $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, respecto a dicha base.