ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Hoja nº 2

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1. Decidir si las siguientes matrices son invertibles, y, si lo son, encontrar su inversa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 9 & 2 & -1 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Encontrar una matriz escalonada reducida por filas A_i' equivalente a cada una de las matrices A_i, $i = 1, 2, 3$, calculando a la vez una matriz P_i tal que $A' = P_i A$. ¿Qué rango tienen estas matrices?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 2/3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & -6 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -6 & -4 & 7 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Se dice que dos matrices $A, B \in M_n(K)$ conmutan si $AB = BA$. Encontrar todas las matrices que conmutan respectivamente con:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. a) Demostrar con ejemplos que las siguiente identidades son falsas en general:

$$(AB)^2 = A^2B^2, \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \qquad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

b) Demostrar que si A y B conmutan entonces las identidades anteriores son ciertas.

5. Sean $A, B \in GL_n(K)$, es decir, A y B son matrices $n \times n$ invertibles. Encontrar todas las matrices $X \in M_n(K)$ que satisfacen

$$AB^{-1}AXA^{-1}B + 9AB = 0.$$

6. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ y el polinomio $p(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$. Demostrar que se tiene $p(A) = 0$. Es decir, $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0 \in M_2(K)$.

7. Demotrar, sin resolver el sistema, que la variedad lineal V que forman las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales es un plano en $\mathbb{R}^5$:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x + 4y + 3z + 4t + 2u & = & 3 \\ x + z - 2u & = & 1 \\ y + z + t & = & 1 \\ -x + y + t + 2u & = & 0 \\ x + 5y + 6z + 5t + 2u & = & 0 \end{array}\right\}$$

- ¿Podemos eliminar la segunda ecuación sin cambiar V?¿Y la quinta ecuación?
- ¿Es posible encontrar una descripción paramétrica de las soluciones en la cual las incognitas x, u sean libres?¿Y de las incognitas z, t?