ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Examen
31-10-2012

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

Razonar debídamente las respuestas	⋄ ⋄ ⋄	**Ejercicio 1**	**Ejercicio 2**	**Ejercicio 3**	**FINAL**
		4 puntos	4 puntos	2 puntos	10

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Se define la *traza de* A, $tr(A)$, como la suma de los elementos de la diagonal de A; esto es, $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Entonces el conjunto $\mathcal{T}_3 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, tr(A) = 3\}$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$ para todo entero positivo n.

(ii) Sea V un K-espacio vectorial y $u, v, w \in V$. Si u se puede expresar como combinación lineal de v y w, entonces v se puede expresar como combinación lineal de u y w.

(iii) Los vectores $(1,1,1), (0,1,1), (0,a,1) \in \mathbb{R}^3$ son linealmente independientes para cualquier valor $a \in \mathbb{R}$.

(iv) El conjunto $1, z-1, (z-1)^2, (z-1)^3, (z-1)^4$ forma una base de $\mathbb{C}_4[z]$.

Problema 2. Sean $M_1, M_2, M_3, N_1, N_2 \in M_2(\mathbb{Q})$ las siguientes matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sean $W_1 = \langle M_1, M_2, M_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$ y $W_2 = \langle N_1, N_2 \rangle_{\mathbb{Q}}$ subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{Q})$.

(i) Calcula bases para W_1 y para W_2.

(ii) Calcula una base para $W_1 + W_2$.

(iii) Calcula una base de $W_1 \cap W_2$ y comprueba que se cumple la fórmula de Grassmann para W_1 y W_2.

(iv) Decide de manera razonada si $M_2(\mathbb{Q}) = W_1 \oplus W_2$.

Problema 3. Sea $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,|\, p(0) = 0\}$ el subespacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 que se anulan en el 0.

(i) Calcula la dimensión del espacio vectorial cociente $\mathbb{R}_2[x]/W$.

(ii) Calcula una base de $\mathbb{R}_2[x]/W$.

(iii) Calcula las coordenadas del vector $\left[x^2 + 1\right]$ con respecto a la base calculada en el apartado (ii).