ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Examen
30-10-2012

APELLIDOS, NOMBRE: ____________________

	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	FINAL
Razonar debídamente las respuestas ◇◇◇				
	4 puntos	4 puntos	2 puntos	10

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Si llamamos $\mathcal{C}([0,1])$ al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones continuas $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, el conjunto $W = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}([0,1])$.

(ii) Sea V un K-espacio vectorial de dimension 3 y $\{u, v, w\}$ una base de V Entonces $\{u+v, v+w, w+u\}$ es también base de V.

(iii) Sea V un K-espacio vectorial de dimension n y sean $u_1, \ldots, u_m \in V$ vectores no nulos distintos. Si $m < n$, entonces el conjunto $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es linealmente independiente.

(iv) Sea $V := \{P \in \mathbb{C}_3[x] \mid P(1) = 0, P(-1) = 0\}$. El conjunto $\{(x-1)(x+1)^2, (x-1)^2(x+1)\}$ es una base de V.

Problema 2. Sean $M_1, M_2, M_3 \in M_2(\mathbb{Q})$ las siguientes matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sean $W_1 = \langle M_1, M_2, M_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$ y $W_2 = \{A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{Q}) \mid A \text{ es triangular superior}\}$, que son $\mathbb{Q}$-subespacios vectoriales de $Mat_{2\times 2}(\mathbb{Q})$.

(i) Calcula bases para W_1 y para W_2.

(ii) Calcula una base para $W_1 + W_2$.

(iii) Calcula una base de $W_1 \cap W_2$.

(iv) Comprueba que se cumple la fórmula de Grassmann para W_1 y W_2 y decide, de manera razonada, si $Mat_{2\times 2}(\mathbb{Q}) = W_1 \oplus W_2$.

Problema 3. Sea $W = \{P(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,|\, P(-X) = -P(X)\}$, que es un $\mathbb{R}$-subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$.

(i) Calcula la dimensión del espacio vectorial cociente $\mathbb{R}_2[x]/W$.

(ii) Encuentra una base de $\mathbb{R}_2[x]/W$.

(iii) Calcula las coordenadas del vector $\left[1 + 2x + 3x^2\right]$ con respecto a la base dada en el apartado (ii).