ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Examen
29-10-2012

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

Razonar debídamente las respuestas	⋄⋄⋄	**Ejercicio 1**	**Ejercicio 2**	**Ejercicio 3**	**FINAL**
		4 puntos	4 puntos	2 puntos	10

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Consideremos $V = \mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Entonces el conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ es un subespacio vectorial de V.

(ii) Sea V un K-espacio vectorial y $u, v, w \in V$. Si el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente, entonces v se puede expresar como combinación lineal de u y w.

(iii) Las funciones $f(x) = sen^2(x)$, $g(x) = cos^2(x)$ y $h(x) = 1$ pertenecientes al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ son linealmente independientes.

(iv) Sea $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 3), (0, 0, 3)\}$ una base de $\mathbb{Q}^3$ y $u \in \mathbb{Q}^3$ cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}$ son $(1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$. Entonces las coordenadas del vector u en la base canónica son $(1, 3, 8)$.

Problema 2. Sean $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}_3[x]$ los siguientes polinomios:

$$p_1(x) = x + 3\,, \quad p_2(x) = x^2 + x\,, \quad q_1(x) = x^3 + x^2 + 1 \quad \text{y} \quad q_2(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1\,.$$

Sean $W_1 = \langle p_1(x), p_2(x)\rangle_{\mathbb{R}}$ y $W_2 = \langle q_1(x), q_2(x)\rangle_{\mathbb{R}}$ subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$.

(i) Calcula bases para W_1 y para W_2.

(ii) Calcula una base para $W_1 + W_2$.

(iii) Calcula una base de $W_1 \cap W_2$ y comprueba que se cumple la fórmula de Grassmann para W_1 y W_2.

(iv) Decide de manera razonada si $\mathbb{R}_3[x] = W_1 \oplus W_2$.

Problema 3. Sea $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$ el subespacio vectorial de las matrices simétricas de orden 2.

(i) Calcula la dimensión del espacio vectorial cociente $M_2(\mathbb{R})/W$.

(ii) Calcula una base de $M_2(\mathbb{R})/W$.

(iii) Calcula las coordenadas del vector $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right]$ con respecto a la base calculada en el apartado (ii).