ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Examen
28-11-2012

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

Razonar debídamente las respuestas

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	FINAL
4 puntos	4 puntos	2 puntos	10

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ una aplicación lineal. Si $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}_2[x]$, entonces $\{f(p_1(x)), f(p_2(x)), f(p_3(x))\}$ es sistema de generadores de $\mathbb{R}_2[x]$.

(ii) Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ un isomorfismo. Entonces $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ forman una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

(iii) Sea $f : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow M_2(\mathbb{Q})$ definida por $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 + x_2 \\ 2x_1 & x_1 \end{pmatrix}$. Entonces $dim(Ker(f)) = 1$ ya que f es inyectiva.

(iv) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3 para cualesquiera valores $a, b \in \mathbb{C}$.

Problema 2. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación lineal definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2ax^2 + (a + b + c)x + 2d - c.$$

(i) Calcular la matriz de f con respecto a las bases canónicas de $M_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_2[x]$.

(ii) Calcular una base de $Ker(f)$ e $Im(f)$. Comprueba que se cumple el Teorema de la dimensión.

(iii) Sean $\mathcal{B}_1$ la base de $M_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}_2$ la base de $\mathbb{R}_2[x]$ definidas por

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ 2x^2 + x + 6, 4x^2 + 3x + 1, 2x^2 + x + 4 \right\}.$$

Calcular $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(f)$.

(iv) Calcular la matriz del isomorfismo canónico $\overline{f} : M_2(\mathbb{R})/Ker(f) \longrightarrow Im(f)$ con respecto a algunas bases.

Problema 3. Calcular $det(f)$ donde $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ es el endomorfismo determinado por:

$$\begin{cases} f(x^3 + 2) & = & x^3 + x^2 + x - 1 \\ f(x^3 + 2x^2 + 3x + 5) & = & 5 \\ f(x^3 + 2x + 3) & = & 3x^2 + 4x + 5 \\ f(x^3 + x^2 + x + 1) & = & x \end{cases}$$