

APELLIDOS, NOMBRE: \_\_\_\_\_

Grupo  
**711**

**Razonar debidamente  
las respuestas**

◇◇◇

**Ejercicio 1**

4 puntos

(1+1+1+1)

**Ejercicio 2**

4 puntos

(0,5+3+0,5)

**Ejercicio 3**

2 puntos

(0,5+1,5)

**FINAL**

10

---

**Problema 1.** Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- (i) Si  $A$  es una matriz con coeficientes reales y polinomio característico  $p_A(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3$  entonces  $A$  es de tamaño  $6 \times 6$  e invertible.
  - (ii) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo. Si  $v_1, v_2 \in V$  son autovectores para  $f$  con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  respectivamente y  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , entonces  $v_1 + v_2$  no puede ser autovector para  $f$ .
  - (iii) Si una matriz  $A \in Mat_{35 \times 35}(\mathbb{R})$  satisface  $A^4 = I$ , entonces existen una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $P$ , ambas con coeficientes en  $\mathbb{C}$ , tales que  $AP = PD$ .
  - (iv) Sean  $W_1, W_2$  subespacios de un  $K$ -espacio vectorial  $V$  tales que  $V = W_1 \oplus W_2$ , y sea  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo. Si  $W_1$  es un subespacio invariante por  $f$  entonces  $W_2$  también es invariante por  $f$ .
- 

**Problema 2.** Consideramos la matriz con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- (i) Calcula el polinomio característico de  $A$ . [Debe salirte  $p_A(x) = (x - 2)^2(x^2 + 1)$ , pero tienes que presentar el cálculo completo].
  - (ii) Encuentra  $J$ , la forma de Jordan compleja de  $A$ , una base de  $\mathbb{C}^4$  respecto a la cual el endomorfismo de  $\mathbb{C}^4$  definido por  $A$  tenga matriz  $J$  y una matriz  $P$  tal que  $AP = PJ$ .
  - (iii) Encuentra  $J_{real}$ , la forma de Jordan real de  $A$ , una base de  $\mathbb{R}^4$  respecto a la cual el endomorfismo de  $\mathbb{R}^4$  definido por  $A$  tenga matriz  $J_{real}$  y una matriz  $Q$  tal que  $AQ = QJ_{real}$ .
- 

**Problema 3.** En una población se produce un brote de una enfermedad muy contagiosa pero no excesivamente grave. Cada día enferman un 10% de las personas que estaban sanas, mientras que un 40% de los que estaban enfermos el día anterior se curan.

- a) Escribe una ecuación matricial que describa la situación expuesta, definiendo con cuidado las variables.
  - b) Demuestra que, pasado suficiente tiempo, el porcentaje de población enferma se estabilizará, ¿alrededor de qué valor?
-

