

APELLIDOS, NOMBRE: _____

**Razonar debidamente
las respuestas**



Ejercicio 1

5 puntos

Ejercicio 2

5 puntos

FINAL

10

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- (i) Existen productos escalares en \mathbb{R}^2 respecto de los cuales la base canónica no es ortogonal.
- (ii) Existen endomorfismos de \mathbb{R} que no tienen autovectores.
- (iii) La aplicación $g : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, dada por $g(p(x)) = xp'(x) - (xp(x))'$, con el producto escalar dado por $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ es autoadjunta.

Problema 2. Demostrar que la aplicación $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = (x_1 \ y_1 \ z_1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

define un producto escalar en \mathbb{R}^3 . Para este producto escalar se pide calcular:

- (i) Su matriz con respecto a la base canónica.
- (ii) Una base ortonormal del plano $W \subset \mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $x + y + z = 0$.
- (iii) La proyección ortogonal del punto $P = (1, 0, 1)$ sobre W^\perp .
- (iv) $\text{dist}(P, W)$.