ÁLGEBRA 2 (7-3-2013)	Grado en Físicas Curso 2012–13	Hoja nº 3

Aplicaciones autoadjuntas, hermíticas y unitarias.

1°. Encuentra la aplicación adjunta de las aplicaciones:

(i) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $h(x,y,z) = (x+y+z, x+2y+2z, x+2y+3z)$, con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (-y+z, -x+2z, x+2y)$, con el producto escalar $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$.

(iii) $g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, dada por $g(p(x)) = xp'(x) - (xp(x))'$, con el producto escalar dado por $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

(iv) $T : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$, dada por $T(A) = A^t + A$, con el producto escalar $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$.

2. Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que su matriz en la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,2,0)\}$ está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estudiar si T es autoadjunta.

3°. Diagonalizar en una base ortogonal cada una de las siguientes aplicaciones, demostrando en primer lugar que son autoadjuntas:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x+y, 2y+x)$, con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$.

(ii) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$, con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

(iii) $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, $T(A) = A^t$, con el producto escalar $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$.

4°. Diagonalizar en una base ortonormal los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ dados en la base canónica por las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Sea considera una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ en un espacio vectorial euclídeo V y la aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ definida por

$$3f(u_1) = 2u_1 - 2u_2 + u_3, \quad 3f(u_2) = \alpha u_1 + u_2 - 2u_3. \quad 3f(u_3) = \beta u_1 + \gamma u_2 + 2u_3.$$

Encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ para que la aplicación f sea autoadjunta.

6*. Sea T una aplicación lineal de un espacio euclídeo V en sí mismo. Sea T^* la adjunta de T. Demuestra:

(i) $T + T^*$ es autoadjunta.

(ii) $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$.

(iii) $\mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)^\perp$.

(iv) Si $\|T(u)\| \le \|u\|$, entonces $\|T^*(u)\| \le \|u\|$.

7°. Determinar si son hermíticas o unitarias las aplicaciones de $\mathbb{C}^3$ en $\mathbb{C}^3$ cuyas matrices en la base canónica son las siguientes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2\sqrt{2}-2i \\ 0 & -4 & 0 \\ -2\sqrt{2}+2i & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1-i\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1+i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3i+4 & 2-6i & -4 \\ 2-6i & 1 & -2-6i \\ -4 & -2-6i & 4-3i \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \tfrac{1}{9} \begin{pmatrix} -4i & -1 & 8i \\ 4i & -8 & i \\ 7i & 4 & 4i \end{pmatrix}.$$

8. En el espacio hermítico $\mathbb{C}^3$ con el producto hermítico usual encontrar el complemento ortogonal del subespacio $\mathcal{L}(i, 0, 1)$.

9. Sea $\mathbb{C}^2$ con el producto hermítico usual. Estudiar si son unitarias las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3+2i & 5-i \\ 2+i & 1+i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{2} & i \\ i & 1-i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1+i & 2+i \\ -1-i & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclídeo y $H = \{u + iv \mid u, v \in V\}$. Definimos la aplicación $[\ ,\ ] : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$[u + iv, z + iw] = \langle u, z\rangle + \langle v, w\rangle + (-\langle v, z\rangle + \langle u, w\rangle)i$$

Demostrar que $[\ ,\ ]$ es un producto hermítico en H.

11. Probar que si A es una matriz hermítica entonces los vectores propios de autovalores distintos son ortogonales.