ÁLGEBRA 2

(7-3-2013)

Grado en Físicas
Curso 2012–13

Hoja nº 2

Diagonalización de endomorfismos.

1°. Dados los siguientes endomorfismos

$$
\begin{array}{ll}
f_1 \,:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, & f_1(x,y) = (y,x),\\
f_2 \,:\, \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, & f_2(x,y) = (y,-x),\\
f_3 \,:\, \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2, & f_3(x,y) = (x-y/2, y-2x),\\
f_4 \,:\, \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2^2, & f_4(x,y) = (x, x+y),\\
f_5 \,:\, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, & f_5(x,y,z) = (3y+9z, x/3+5z, x/9+y/3),\\
f_6 \,:\, \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3, & f_6(x,y,z) = (6x-7y-20z, -8z, x-y),\\
f_7 \,:\, \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, & f_7(x,y,z) = (2x+y+z, 2x+3y+2z, 4x+4y+3z),\\
f_8 \,:\, \mathbb{F}_2^3 \longrightarrow \mathbb{F}_2^3, & f_8(x,y,z) = (x+y, x+z, y+z),\\
f_9 \,:\, \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x], & f_9(p(x)) = p'(x),\\
f_{10} \,:\, M_2(\mathbb{F}_2) \longrightarrow M_2(\mathbb{F}_2), & f_{10}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b\\ a+b+d & b+c+d\end{pmatrix},\\
f_{11} \,::\, W \longrightarrow W, & f_{11}(x,y,z) = (3x+y, 2z, y-x), \quad \text{donde } W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}.
\end{array}
$$

Se pide para cada endomorfismo lo siguiente:

(i) Calcular los autovalores y autovectores.

(ii) Estudiar si es diagonalizable o no sobre el cuerpo base.

(iii) En caso de que sea diagonalizable:

1. Encontrar una base $\mathcal{B}$ formada por autovectores.
2. Escribir la matriz diagonal D del endomorfismo con respecto a $\mathcal{B}$.
3. Dar explícitamente la relación entre la matriz D y la matriz del endomorfismo que hayas utilizado para calcular el polinomio característico.

2°. Determinar en cada caso una base de $\mathbb{R}^n$ (o de $\mathbb{C}^n$) en la que las matrices dadas a continuación diagonalicen.

$$
A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 4\\ -5 & -2\end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 5\\ -2 & -3\end{pmatrix},
$$

$$
A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3\\ 3 & -3 & -1\\ -3 & -1 & -3\end{pmatrix},\ A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix},\ A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},\ A_9 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2\\ -3 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}
$$

3°. Dadas las matrices de $M_3(\mathbb{R})$

$$
A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.
$$

Se pide:

(i) Demostrar que ambas tiene los mismos autovalores.

(ii) ¿Pueden representar el mismo endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, quizás en bases distintas?

4. Estudiar según el parámetro $a \in \mathbb{R}$ la diagonalización del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canónica, tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$$

5°. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcula:

(i) A_k^{10} para $k = 1, 2$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} A_k^n$ para $k = 1, 2$.

6. Sea V un K-espacio de dimensión n, $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V, A la matriz de f con respecto a alguna base de V y $p_f(x) = det(A - xI_n)$ el polinomio característico de f. Entonces

(i) $p_f(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} traza(A) x^{n-1} + \cdots + det(A)$, donde $traza(A)$ es la suma de los elementos de la diagonal de A.

(ii) Demostrar que si B es otra matriz de f con respecto a otra base de V, entonces $traza(B) = traza(A)$, y por lo tanto podemos definir $traza(f) = traza(A)$ que no depende de la matriz elegida.

7. Sea A una matriz cuadradada con coeficientes en un cuerpo K. Demuestra que A y A^t tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos autovalores (en K o en "el cierre algebraico de K").

8°. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo diagonalizable. Demuestra que $V = Ker(f) \oplus Im(f)$.

9. Si A es una matriz triangular de orden n cuyos elementos de la diagonal principal son todos diferentes, probar que A es diagonalizable.

10. Sea r_α la rotación de ángulo α en el plano. Estudiar para que ángulos $\alpha \in \mathbb{R}$, r_α es diagonalizable.

11. Sea R_α la rotación de ángulo α, en el espacio $\mathbb{R}^3$, alrededor del eje Z. Estudiar para que ángulos $\alpha \in \mathbb{R}$, R_α es diagonalizable.

12. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Sea k un entero positivo. Demuestra que si v es un autovector de f, también lo es de f^k. Además si $\mathcal{B}$ es una base de V formada por autovectores de f, entonces $\mathcal{B}$ diagonaliza también a f^k.

13. Sean $\alpha, \beta \in R$ y las matrices de $M_2(\mathbb{R})$ siguientes

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \alpha^2 + \beta^2 = \alpha.$$

Hallar sus autovalores y autovectores. ¿Existe alguna interpretación geométrica de las aplicaciones asociada a estas matrices?

14°. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Demuestra:

(i) f es biyectiva si y sólo si 0 no es valor propio de f.

(ii) λ es valor propio de f si y sólo si $-\lambda$ es valor propio de $-f$.

(iii) Si $f^2 = f$, entonces $\{$valores propios de $f\} \subset \{0, 1\}$.

(iv) Si $f^2 = f$ y f es biyectiva, entonces 1 es el único valor propio de f.

(v) Si $f^2 = id$, entonces $\{$valores propios de $f\} \subset \{1, -1\}$.

15*. Sean $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $W_1 \oplus W_2 = V$. Si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, definimos las funciones

$$\begin{array}{rccl} \pi_1 : & V & \longrightarrow & V \\ & u & \mapsto & \pi_1(u) = v_1 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rccl} s : & V & \longrightarrow & V \\ & u & \mapsto & s(u) = v1 - v2 \end{array}$$

(i) Demuestra que π_1 y s son lineales y que $\pi_1^2 = \pi_1$ y $s^2 = id$.

(ii) Si $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ son bases de W_1 y W_2 respectivamente escribe la matriz de π_1 y de s respecto a la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

(iii) Si la suma $V_1 + V_2$ no fuera directa: ¿se podrían definir las aplicaciones π_1 y s de manera similar?

16*. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Se dice que un endomorfismo $s : V \longrightarrow V$ es una simetría si $s^2 = id_V$ y que $\pi : V \longrightarrow V$ es una proyección si $\pi^2 = \pi$. Se pide:

(i) Demostrar que s y π son diagonalizables.

(ii) Demostrar que para s (resp. π) existen $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $W_1 \oplus W_2 = V$. Así, si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, entonces $s(u) = v1 - v2$ (resp. $\pi_1(u) = v_1$). Observar que W_1 y W_2 dependen de s y π.

17. Llamaremos *matriz estocástica* a una matriz cuadrada $M = (p_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ con coeficientes $p_{i,j} \geq 0$ y tal que la suma de los elementos de cada columna es 1, es decir $\sum_{i=1}^n p_{i,j} = 1$ para cada $j = 1, \ldots, n$ (observa que esto implica $1 \geq p_{i,j} \geq 0$). Por otra parte, dado un vector $v = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{C}^n$ definimos la *norma infinito de* v como

$$\|v\|_\infty := \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \cdots, n\}.$$

Si M es una matriz estocástica, demuestra:

(i) 1 es autovalor de M

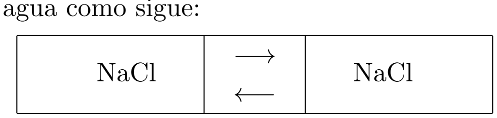
(ii) Para cualquier $v \in \mathbb{C}^n$, se tiene $\|M^t v\|_\infty \leq \|v\|_\infty$. (OJO: aquí la matriz es M^t, que es "estocástica por filas".)

(iii) Cualquier autovalor, real o complejo, λ de M^t satisface $\|\lambda\| \leq 1$.

(iv) Cualquier autovalor, real o complejo, λ de M satisface $\|\lambda\| \leq 1$.

(v) $(1, \ldots, 1)$ es autovector de M^t, ¿para qué autovalor? ¿Es $(1, \ldots, 1)$ necesariamente autovector de M?

18°. Supongamos que tenemos dos depósitos de igual volumen con agua comunicados por un doble conducto por el que circula el agua como sigue:



Inicialmente, en el primer depósito hay NaCl disuelto al 1 %, y en el segundo hay NaCl disuleto al 2 %. Cada minuto pasa un 5 % del volumen del primer depósito al segundo y viceversa. Decide de manera razonada la concentración de NaCl que habrá en cada uno de los depósitos después de 120 minutos. ¿Qué prevés que suceda a largo plazo?