23 de Noviembre 2007

1. Sean p_1, p_2, p_3 números primos tales que $p_1 < p_2 < p_3$:

(a) Demostrar que no es posible que $p_1p_2p_3 = p_1^3 + p_2^3 + p_3^3$.

(b) ¿Qué se puede decir de $p_1p_2p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$?
Ayuda: Distinguir el caso en el que 3 divide a $p_1p_2p_3$ y en el que no.

2. Encontrar el menor entero positivo n tal que $\sqrt[7]{n/7}$ y $\sqrt[11]{n/11}$ son ambos enteros.

3. En una carta a Christian Huygens en 1659, Fermat escribió que había encontrado todos los enteros de la forma $3k-1$ que a su vez son de la forma x^2+3y^2. ¿Cúales son estos enteros?

4. Determinar para qué primos p es 6 un residuo cuadrático módulo p.

5. Calcular las soluciones enteras de la ecuación diofántica $y^2 = x^3 + 7$.
Ayuda: $y^2 + 1 = (x+2)((x-1)^2+3)$.

6. Calcular el número de soluciones de la congruencia $15n^2 + 12n - 6 \equiv 0 \pmod{2066715}$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Demostrar que el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m}, \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

tiene solución si y sólo si $(m,n)|(a-b)$.

OBSERVACIONES:

- Razonar las respuestas.
- Puntuación de los ejercicios

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	1.5	1	2	1	1.5	1