Hoja 3b

(1) En $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ definimos los ideales

$$\begin{aligned}\mathfrak{p} &= <2, 1+\sqrt{-5}>,\\ \mathfrak{q} &= <3, 1+\sqrt{-5}>,\\ \mathfrak{r} &= <3, 1-\sqrt{-5}>.\end{aligned}$$

(a) Demostrar que son ideales maximales, por lo tanto primos.

(b) Mostrar que

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}^2 &= <2>,\\ \mathfrak{q}\cdot\mathfrak{r} &= <3>,\\ \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} &= <1+\sqrt{-5}>,\\ \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{r} &= <1-\sqrt{-5}>.\end{aligned}$$

(c) Demostrar que las factorizaciones de 6:

$$6 = 2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}),$$

provienen de diferentes agrupamientos de la factorización en ideales primos:

$$<6> = \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{r}.$$

(d) Calcular las normas de los ideales $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{r}$.

(e) Demostrar que $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{r}$ no son principales.

(f) Demostrar que los ideales $<2>$ y $<3>$ están generados por elementos irreducibles pero que los ideales no son primos.

(2) Encontrar todos los ideales de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ que contienen el elemento 6.

(3) Encontrar todos los ideales de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ con norma 18.

(4) En $\mathbb{Z}[\sqrt{-29}]$ tenemos

$$30 = 2\cdot 3\cdot 5 = (1+\sqrt{-29})(1-\sqrt{-29}).$$

(a) Demostrar que

$$<30> \subseteq \mathfrak{p} := <2, 1+\sqrt{-29}>$$

y que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de norma 2.

(b) Ver que $1-\sqrt{-29}\in\mathfrak{p}$ y deducir que $<30>\subseteq\mathfrak{p}^2$.

(c) Calcular ideales primos $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}', \mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$ con normas 3 y 5 tales que

$$<30> \subseteq \mathfrak{q}\cdot\mathfrak{q}' \quad \text{y} \quad <30> \subseteq \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}'.$$

(d) Deducir que $\mathfrak{p}^2\cdot\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{q}'\cdot\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}' \mid <30>$ y calculando normas, o de otro modo, demostrar que

$$<30> = \mathfrak{p}^2\cdot\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{q}'\cdot\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}'.$$

(e) Comentar como está esto relacionado con las dos factorizaciones:

$$\begin{aligned}<30> &= <2><3><5>,\\ <30> &= <1+\sqrt{-29}><1+\sqrt{-29}>.\end{aligned}$$

(f) Calcular todos los ideales de $\mathbb{Z}[\sqrt{-29}]$ conteniendo al elemento 30.

(5) En $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ definimos, como en el ejercicio **(1)** los ideales

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= < 2, 1+\sqrt{-5} >, \\ \mathfrak{q} &= < 3, 1+\sqrt{-5} >, \\ \mathfrak{r} &= < 3, 1-\sqrt{-5} > . \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{H}$ el grupo de clase. Demostrar que en $\mathcal{H}$ se tiene:

$$[\mathfrak{p}]^2 = [\mathcal{O}], \quad [\mathfrak{p}][\mathfrak{q}] = [\mathcal{O}], \quad [\mathfrak{p}][\mathfrak{r}] = [\mathcal{O}],$$

y deducir que $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{r}$ son equivalentes. Demostrar también que $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{r}$ son equivalentes haciendo los cálculos explicitos.

(6) En $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$:

(a) Demostrar que todo ideal es equivalente a uno de norma menor o igual que 3.

(b) Comprobar que $< 2 >=< 2, \sqrt{-6} >^2, < 3 >=< 3, \sqrt{-6} >^2$ y concluir que los únicos ideales de normas 2 y 3 son $< 2, \sqrt{-6} >$ y $< 3, \sqrt{-6} >$ respectivamente.

(c) Deducir de lo anterior que $h \leq 3$ y utilizar que $< 2 >=< 2, \sqrt{-6} >^2$, o cualquier otro modo, para probar que $h = 2$.

(d) Encontrar ideales principales $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ tales que

$$\mathfrak{p} < 2, \sqrt{-6} >= \mathfrak{q} < 3, \sqrt{-6} > .$$

(7) Para cada uno de los cuerpos siguientes, factorizar los ideales que se indican en sus respectivos anillos de enteros:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : < 2 >, < 3 >, < 5 >, < 10 >, < 30 >.$

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : < 2 >, < 3 >, < 5 >, < 12 >, < 25 >.$

(c) $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5}) : < 2 >, < 5 >, < 20 >, < 50 >.$

(8) Encontrar la estructura del grupo de clase para cada uno de los cuerpos cuadráticos $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ con d libre de cuadrados y $-30 < d < 30$. La Tabla siguiente indica los valores de h (donde h^+ es el número de clase de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ y h^- el de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$).

d	h^+	h^-	d	h^+	h^-
1	–	1	14	1	4
2	1	1	15	2	2
3	1	1	17	1	4
5	1	2	19	1	1
6	1	2	21	1	4
7	1	1	22	1	2
10	2	2	23	1	3
11	1	1	26	2	6
13	1	2	29	1	6