Hoja 3a

(1) ¿Cuáles de los siguientes números complejos son números algebraicos?:

$$\frac{355}{133}, e^{\frac{2\pi i}{23}}, \sqrt{17}+\sqrt{19}, \frac{1+\sqrt{17}}{2\sqrt{-19}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{1-\sqrt{2}}, \pi^k \text{ con } k\in\mathbb{Q}.$$

(2) Sean $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ enteros algebraicos de $\mathbb{Q}(\theta)$ que son $\mathbb{Q}$-linealmente independientes. Sea $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}]=n$ y sea Δ el discriminante de $\mathbb{Q}(\theta)$. Demostrar que si $\Delta[\alpha_1,\dots,\alpha_n]=\Delta$, entonces $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ es una base entera de $\mathbb{Q}(\theta)$.

(3) **(a)** Si $[K:\mathbb{Q}]=n$ y $\alpha\in\mathbb{Q}$, demostrar

$$\mathrm{N}_K(\alpha)=\alpha^n \quad \text{y} \quad \mathrm{Tr}_K(\alpha)=n\,\alpha.$$

(b) Dar un ejemplo que demuestre que para un α fijo, $\mathrm{N}_K(\alpha)$ y $\mathrm{Tr}_K(\alpha)$ dependenden de K, y que por tanto no se puede hablar de *norma* de α ni de *traza* de α sin hacer referencia a una extensión $\mathbb{Q}\subset K$.

(4) Sea $\zeta=e^{2\pi i/3}$.

(a) Demostrar que $\mathbb{Q}(\zeta)=\{a+b\,\zeta : a,b\in\mathbb{Q}\}$ y que $\mathbb{Z}[\zeta]=\{a+b\,\zeta : a,b\in\mathbb{Z}\}$

(b) Demostrar que si $\mathrm{N}:\mathbb{Z}[\zeta]\to\mathbb{Z}$ es la norma en $\mathbb{Q}(\zeta)$ restringida a $\mathbb{Z}[\zeta]$, entonces $\mathrm{N}(a+b\,\zeta)=a^2-a\,b+b^2$. Probar que si $a+b\,\zeta=u+v\,i$ con $u,v\in\mathbb{R}$ (todo elemento de $\mathbb{Z}[\zeta]$ se puede escribir así de manera única) entonces $\mathrm{N}(a+b\,\zeta)=u^2+v^2$.

(c) Demostrar que si α divide a β en $\mathbb{Z}[\zeta]$, entonces $\mathrm{N}(\alpha)$ divide a $\mathrm{N}(\beta)$ en $\mathbb{Z}$.

(d) Sea $\alpha\in\mathbb{Z}[\zeta]$. Probar que α es una unidad si y sólo si $\mathrm{N}(\alpha)=1$. Encontrar todas las unidades de $\mathbb{Z}[\zeta]$. (Son sólo 6).

(e) Demostrar que $1-\zeta$ es irreducible en $\mathbb{Z}[\zeta]$ y que $3=u\,(1-\zeta)^2$ para una cierta unidad u.

(5) Encontrar bases enteras y los discriminantes de los siguientes cuerpos:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{-7}), \mathbb{Q}(\sqrt{11}), \mathbb{Q}(\sqrt{-11}), \mathbb{Q}(\sqrt{6}), \mathbb{Q}(\sqrt{-6}).$$

(6) Sea $K=\mathbb{Q}(\zeta)$ donde $\zeta=e^{2\pi i/5}$. Calcular $\mathrm{N}_K(\alpha)$ y $\mathrm{Tr}_K(\alpha)$ para los siguientes valores de α:

$$\zeta^2, \zeta+\zeta^2, 1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4\,.$$

(7) Sea $K=\mathbb{Q}(\zeta)$ donde $\zeta=e^{2\pi i/5}$.

(a) Demostrar que si $\alpha\in\mathbb{Z}[\zeta]$, entonces $\mathrm{N}_K(\alpha)$ es de la forma $(a^2-5\,b^2)/4$ con $a,b\in Z$.

(b) Probar que $\mathbb{Z}[\zeta]$ tiene un número infinito de unidades.

(c) Demostrar que para $a,b\in\mathbb{Q}$,$a\neq -b$, se tiene $\mathrm{N}_K(a+b\,\zeta)=(a^5+b^5)/(a+b)$.

(d) Calcular $\mathrm{N}_K(\alpha)$ para $\alpha=\zeta+2,\zeta-2,\zeta+3,\zeta-3,\zeta+4$.

(e) Demostrar que $\zeta+2,\zeta-2,\zeta+3$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[\zeta]$.

(f) Factorizar $11, 31$ y 61 en $\mathbb{Z}[\zeta]$.

(g) Probar que todos los divisores propios de $\zeta+4$ tienen norma 5 ó 41, y, sabiendo que $\zeta-1$ es un factor de $\zeta+4$, encontrar otro.

(8) Encontrar todas las soluciones enteras de las ecuaciones $y^2+4=x^3$ (puede convenir distinguir el caso de y par del de y impar), $y^2+19=x^3$ e $y^2+3=x^3$. (Ayuda: Factorizar).

(9) Ramanujan observó que 1729 es el menor entero positivo que se puede escribir como suma de dos cubos de dos maneras distintas. Demostrar que, efectivamente, la ecuación $x^3 + y^3 = 1729$ tiene dos soluciones distintas en enteros positivos (excluyendo intercambiar x e y). (Ayuda: factorizar ambos lados.) La misma idea permitiría, quizá con ayuda de un ordenador, comprobar caso a caso que ningún $n < 1729$ tiene esta propiedad. O sin utilizar el ordenador, elegir un n tal que $100 < n < 1729$ y tal que n sea suma de dos cubos, y demostrar que la ecuación $x^3 + y^3 = n$ tiene una única solución con x e y enteros positivos (excluyendo intercambiar x e y).

(10) Sea $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ donde $\zeta = e^{2\pi i/5}$. Si α es un primo en $\mathbb{Z}[\zeta]$, probar que el conjunto de enteros racionales que son divisibles por α es precisamente un ideal (q) de $\mathbb{Z}[\zeta]$ para un primo racional q. Esto es, que $(\alpha\mathbb{Z}[\zeta]) \cap (\mathbb{Z}) = q\mathbb{Z}$ para algún primo racional q. (Ayuda: Demostrarlo en general).

(11) Sea K un cuerpo de números con anillo de enteros $\mathcal{O}$. Sea $x \in \mathcal{O}$ un elemento primo, demostrar que $\mathrm{N}_K(x) = \pm q^r$, para un primo racional q y un $r \leq [K : \mathbb{Q}]$.

(12) **(a)** Sea $\mathbb{Q}_2$ el conjunto formado por lo números racionales a/b con $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que b es impar. Probar que $\mathbb{Q}_2$ es un dominio en el que los únicos irreducibles son 2 y sus asociados.

(b) Generalizar el resultado anterior al anillo $\mathbb{Q}_\Sigma$ (donde Σ es un conjunto finito de números enteros primos) formado por racionales a/b con $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que b es primo con todos los elementos de Σ.

(13) Sea $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$, p primo impar. Demostrar que $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ contiene a $\sqrt{p}$ si $p \equiv 1 \pmod 4$, y contiene a $\sqrt{-p}$ si $p \equiv 3 \pmod 4$. (Ayuda: ¿Cúal es el discriminante de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$?) Expresar $\sqrt{-3}$ y $\sqrt{5}$ como polinomios en el correspondiente ζ_p.

(14) Utilizar las siguientes igualdades para demostrar que los anillos de enteros de los correspondientes cuerpos cuadráticos no son D.F.U.:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$,
(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$: $6 = 2 \cdot 3 = \sqrt{-6}\sqrt{-6}$,
(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{-10})$: $14 = 2 \cdot 7 = (2 + \sqrt{-10})(2 - \sqrt{-10})$,
(d) $\mathbb{Q}(\sqrt{-13})$: $14 = 2 \cdot 7 = (1 + \sqrt{-13})(1 - \sqrt{-13})$,
(e) $\mathbb{Q}(\sqrt{-14})$: $15 = 3 \cdot 5 = (1 + \sqrt{-14})(1 - \sqrt{-14})$,
(f) $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$: $4 = 2 \cdot 2 = \left(\frac{1+\sqrt{-15}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{-15}}{2}\right)$,
(g) $\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-17})(1 - \sqrt{-17})$,
(h) $\mathbb{Q}(\sqrt{-21})$: $22 = 2 \cdot 11 = (1 + \sqrt{-21})(1 - \sqrt{-21})$,
(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{-22})$: $26 = 2 \cdot 13 = (2 + \sqrt{-22})(2 - \sqrt{-22})$,
(j) $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$: $6 = 2 \cdot 3 = \left(\frac{1+\sqrt{-23}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{-23}}{2}\right)$,
(k) $\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$: $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-26})(1 - \sqrt{-26})$,
(l) $\mathbb{Q}(\sqrt{-29})$: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = (1 + \sqrt{-29})(1 - \sqrt{-29})$,
(m) $\mathbb{Q}(\sqrt{-30})$: $34 = 2 \cdot 17 = (2 + \sqrt{-30})(2 - \sqrt{-30})$,
(n) $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$: $6 = 2 \cdot 3 = (4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10})$,
(ñ) $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$: $10 = 2 \cdot 5 = (5 + \sqrt{15})(5 - \sqrt{15})$,
(o) $\mathbb{Q}(\sqrt{26})$: $10 = 2 \cdot 5 = (6 + \sqrt{26})(6 - \sqrt{26})$,
(p) $\mathbb{Q}(\sqrt{30})$: $6 = 2 \cdot 3 = (6 + \sqrt{30})(6 - \sqrt{30})$.