19 de Enero 2007

(1) Sea $\mathcal{O}$ el anillo de enteros de $\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$.

- **(a)** Calcular $\mathcal{O}$, una base entera de $\mathcal{O}$, $\mathcal{U}(\mathcal{O})$ y $\Delta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-17})}$.
- **(b)** Calcular la norma y la traza de los siguientes elementos de $\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$: 3, $1+\sqrt{-17}$ y $\frac{1}{2}(1+3\sqrt{-17})$
- **(c)** Encontrar todos los elementos de $\mathcal{O}$ de norma p donde $p = 2, 3, 5$.
- **(d)** Demostrar que $\mathcal{O}$ no es un dominio de ideales principales.
- **(e)** Factorizar los ideales $\langle p\rangle\mathcal{O}$ como producto de ideales primos de $\mathcal{O}$ para $p = 2, 3, 5$.
- **(f)** Demostrar que todo ideal de $\mathcal{O}$ es equivalente, en el grupo de clases de $\mathcal{O}$, a uno de los ideales que aparecen en la factorización del apartado anterior.
- **(g)** Encontrar todos los ideales de $\mathcal{O}$ de norma 30.
- **(h)** Encontrar todos los ideales de $\mathcal{O}$ que contienen al elemento 6. Y al 17.
- **(i)** Calcular el número de clase de $\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$.
- **(j)** Determinar la estructura del grupo de clase de $\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$.

(2) Determinar las soluciones enteras de la ecuación diofántica $C : y^2 + 17 = x^3$.
Sugerencia: Primero demostrar que si $(x, y) \in C(\mathbb{Z})$ entonces el único ideal primo $\mathfrak{P}$ que pudiera dividir a los ideales $\langle y + \sqrt{-17}\rangle$, $\langle y - \sqrt{-17}\rangle$ es $\mathfrak{P} = \langle\sqrt{-17}\rangle$.

OBSERVACIONES:

- Razonar las respuestas.
- Puntuaciones:

1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	2
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1,5	1,5	3