Matemáticas I

Derecho y Administración de Empresas

Test Parte I

1. Sea la función $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Indique, razonando la respuesta, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Si f es diferenciable en (a,b), entonces existe $\nabla f(a,b)$.

   b) Si $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $|\vec{v}| \neq 1$, es un vector arbitrario y $\nabla f(a,b) = (\beta, \gamma)$ con $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, entonces
$$D_{\vec{v}} f(a,b) = \beta v_1 + \gamma v_2.$$

   c) Si existe $k \in \mathbb{R}$, tal que
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = k,$$
   entonces $(a,b) \in \mathrm{Dom}(f)$.

2. Dada la función $f(x,y) = \sqrt{2x-3}\; e^{x-2y^2}$, se pide:

   a) Hallar el dominio de f, analíticamente y gráficamente.

   b) Calcular $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$.

   c) Calcular la derivada direccional de f en el punto $(2,1)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (4,3)$.

   d) Determinar el valor de la máxima derivada direccional de f en el punto $(2,1)$.

   e) Estudiar si la curva de nivel 1 define a y como función implícita de x en algún entorno del punto $(2,1)$. En caso afirmativo, hallar la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel 1 en dicho punto.

   f) Si $w = f(x,y)$, $x = \ln(-t+4)+2$, $y = x^2 - 3$, calcular la derivada primera de w en $t = 3$, utilizando la regla de la cadena.

   g) Hallar el polinomio de Taylor de f de primer orden en $(2,1)$. Dar un valor aproximado de orden uno de $f(1'99, 1'02)$.

   h) Estudiar si f es una función homogénea.

3. Sea la función $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas hasta orden 2 y cuya matriz Hessiana en el punto (a,b) es igual a:
$$\mathrm{H}f(a,b) = \begin{pmatrix} 2 & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$
   donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$.

   a) Si (a,b) es un punto de silla de f, calcular $\nabla f(a,b)$ y la relación que debe existir entre α y β.

   b) Si $\nabla f(a,b) = (ab, 0)$, escribir el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto (a,b).