Matemáticas I

Derecho y Administración de Empresas

SOLUCIONES : Test Parte I

1. **Sea la función $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Indique, razonando la respuesta, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:**

   a) **Si f es diferenciable en (a,b), entonces existe $\nabla f(a,b)$.**
   Solución: Verdadero. Ya que hemos visto que entonces existe el plano tangente a la gráfica de f en el punto f. Y por lo tanto existe $\nabla f(a,b)$.

   b) **Si $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\|\vec{v}\| \neq 1$, es un vector arbitrario y $\nabla f(a,b) = (\beta, \gamma)$ con $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, entonces**
   $$D_{\vec{v}} f(a,b) = \beta v_1 + \gamma v_2.$$
   Solución: Falso. Ya que si $\|\vec{v}\| \neq 1$ y f es diferenciable, entonces
   $$D_{\vec{v}} f(a,b) = \beta \frac{v_1}{\|\vec{v}\|} + \gamma \frac{v_2}{\|\vec{v}\|}.$$

   c) **Si existe $k \in \mathbb{R}$, tal que**
   $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = k,$$
   entonces $(a,b) \in \mathrm{Dom}(f)$.
   Solución: Falso. Si definimos la función siguiente
   $$f(x,y) = 1, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$
   entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y sin embargo
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1.$$

2. **Dada la función $f(x,y) = \sqrt{2x-3}\, e^{x-2y^2}$, se pide:**

   a) **Hallar el dominio de f, analíticamente y gráficamente.**
   Solución: $Dom(f)$ $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x-3 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \frac{3}{2}\}$.
   Es decir, es el semiplano derecho para el que $x \geq \frac{3}{2}$.

   b) **Calcular $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$.**
   Solución: Se tiene
   $$\left\{ \begin{array}{l} f_x(x,y) = e^{x-2y^2} \left(\sqrt{2x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} \right) \\ f_y(x,y) = -4\,y\,\sqrt{2x-3}\, e^{x-2y^2} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f_x(2,1) = 2 \\ f_y(2,1) = -4 \end{array} \right.$$

c) **Calcular la derivada direccional de f en el punto $(2,1)$ en la dirección del vector $\vec{v}=(4,3)$.**
Solución: Obsérvese en primer lugar que $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ son funciones continuas en un entorno del punto $(2,1)$. Por lo tanto, sabemos por un teorema visto en la teoría

$$D_{\vec{v}}f(2,1)=\nabla f(2,1)\cdot\frac{v}{\|\vec{v}\|}.$$

En nuestro caso se tiene que $\nabla f(2,1)=(2,-4)$ y $\|\vec{v}\|=\sqrt{4^2+3^2}=5$. Por lo tanto tenemos:

$$D_{\vec{v}}f(2,1)=(2,-4)\cdot\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)=2\cdot\frac{4}{5}+(-4)\cdot\frac{3}{5}=\frac{-4}{5}.$$

d) **Determinar el valor de la máxima derivada direccional de f en el punto $(2,1)$.**
Solución: La derivada direccional máxima se obtiene en la dirección del vector gradiente. Es decir,

$$\max_{v\in\mathbb{R}^2}(D_{\vec{v}}f(2,1))=\|\nabla f(2,1)\|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}.$$

e) **Estudiar si la curva de nivel 1 define a y como función implícita de x en algún entorno del punto $(2,1)$. En caso afirmativo, hallar la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel 1 en dicho punto.**
Solución: Apliquemos el Teorema de la Función Implícita:

1) $f(2,1)=1$.
2) $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ son continuas en un entorno del punto $(2,1)$.
3) $f_y(2,1)=-4\neq 0$.

Por lo tanto, la curva de nivel 1 de f define a y como función implícita de x en un entorno del punto $(2,1)$. Además este teorema nos dice que la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel 1 en el punto $(2,1)$ es:

$$\frac{dy}{dx}(2)=-\frac{f_x(2,1)}{f_y(2,1)}=\frac{1}{2}.$$

Obsérvese que de hecho $f(x,y)=1$ define de forma explícita a y como función de x en un entorno de $(2,1)$. Basta con tomar ln en la ecuación $\sqrt{2x-3}\;e^{x-2y^2}=1$ y así obtener:

$$y(x)=\sqrt{\frac{1}{4}ln(2x-3)+\frac{x}{2}}.$$

f) **Si $w=f(x,y)$, $x=\ln(-t+4)+2$, $y=x^2-3$, calcular la derivada primera de w en $t=3$, utilizando la regla de la cadena.**
Solución: Utilizando la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\\ &= f_x(x(t),y(t))\left(\frac{-1}{-t+4}\right)+f_y(x(t),y(t))\,2\,x(t)\left(\frac{-1}{-t+4}\right)\end{aligned}$$

Se tiene que para $t=3$, $(x,y)=(2,1)$. Así que se concluye con:

$$\frac{dw}{dt}(3)=-(f_x(2,1)+4\,f_y(2,1))=14.$$

g) **Hallar el polinomio de Taylor de f de primer orden en $(2,1)$. Dar un valor aproximado de orden uno de $f(1'99,1'02)$.**
Solución: El polinomio de Taylor de primer orden de f en el punto $(2,1)$ es:

$$P_{1,(2,1)}(x,y)=f(2,1)+f_x(2,1)(x-2)+f_y(2,1)(y-1)=1+2(x-2)-4(y-1).$$

Como sabemos que el polinomio de Taylor en el punto $(2,1)$ aproxima a $f(x,y)$ para puntos próximos a $(2,1)$, obtenemos:

$$f(1'99,1'02)\simeq P_{1,(2,1)}(1'99,1'02)=0'9.$$

h) Estudiar si f es una función homogénea.

Solución: Si f fuera homogénea de grado k el Teorema de Euler nos dice que para cualquier punto (a,b) para el que existen las derivadas parciales primeras de f en (a,b) se tiene

$$a \cdot f_x(a,b) + b \cdot f_y(a,b) = k \cdot f(a,b).$$

Para el caso particular de $(a,b) = (2,1)$ se tiene:

$$2 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) = k \cdot 1 \qquad \Rightarrow \qquad k = 0.$$

Mientras que si tomamos $(a,b) = (2,0)$ obtenemos

$$2 \cdot 2e^2 + 0 \cdot 0 = k \cdot e^2 \qquad \Rightarrow \qquad k = 4.$$

Por lo tanto f no es homogénea.

3. **Sea la función $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas hasta orden 2 y cuya matriz Hessiana en el punto (a,b) es igual a:**

$$\mathrm{H}f(a,b) = \begin{pmatrix} 2 & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$.

a) **Si (a,b) es un punto de silla de f, calcular $\nabla f(a,b)$ y la relación que debe existir entre α y β.**

Solución: La función f tiene derivadas parciales primeras continuas, por lo tanto los puntos críticos de f son aquellos que anulan el gradiente. Es decir, aquellos puntos (x_0, y_0) tales que $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$. Si (a,b) es un punto de silla de f, en particular es un punto crítico de f. Por lo que concluimos $\nabla f(a,b) = (0,0)$.

El Teorema del Hessiano nos dice que para que (a,b) sea un punto de silla se ha de tener que el determinante de $\mathrm{H}f(a,b)$, ha de ser estrictamente negativo. Es decir:

$$2\alpha - \beta^2 < 0.$$

b) **Si $\nabla f(a,b) = (ab, 0)$, escribir el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto (a,b).**

Solución: El polinomio de Taylor de segundo orden de f en el punto (a,b) es:

$$P_{2,(a,b)}(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(a,b)(y-b)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b).$$

El enunciado nos dice que $\nabla f(a,b) = (ab, 0) = (f_x(a,b), f_y(a,b))$ y que

$$\mathrm{H}f(a,b) = \begin{pmatrix} 2 & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$P_{2,(a,b)}(x,y) = f(a,b) + ab(x-a) + (x-a)^2 + \frac{\alpha}{2}(y-b)^2 - \beta(x-a)(y-b).$$