Matemáticas I

Derecho y Administración de Empresas

Hoja 9 : Integrales Impropias

1. Demostrar los siguientes apartados:

   a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}$

   b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}$

   c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \infty$

   d) Sean $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$, entonces

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1 \\ \infty & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

2. Demostrar los siguientes apartados:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$

   b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$

   c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \infty$

   d) Sea $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, entonces

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ \infty & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

3. Determinar la convergencia de las siguientes integrales impropias. En caso de convergencia, calcular el valor de la integral.

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{x}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(arcotg\, x)^2}{1+x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^4}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$

4. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sen\,x}{x^4}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{ln\,x}{x^2}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

5. Calcular, si es posible, el área de los conjuntos siguientes:

   a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0\,,\, x^2y\leq 1\}$

   b) Región limitada por la curvas $xy=1$, $y=0$, $x=0$ y $x=1$.

   c) Región limitada por la curvas $y\sqrt{x}=1$, $y=0$, $x=0$ y $x=1$.

6. Si $p,q\in\mathbb{R}$, demostrar los siguientes apartados:

   a) $\beta(p,q)=\beta(q,p)$

   b) Si $q>0$, $\beta(1,q)=\dfrac{1}{q}$

   c) Si $p>0$ y $q>1$ entonces $\beta(p,q)=\dfrac{q-1}{p}\beta(p+1,q-1)$

   d) Si $p,q>0$ entonces $\beta(p,q)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2p-1}(t)\,sen^{2q-1}(t)\,dt$

   Ayuda: Hacer cambios de variable o/e integración por partes.

7. Si $p\in\mathbb{R}$, demostrar los siguientes apartados:

   a) $\Gamma(1)=1$

   b) Si $p>1$ entonces $\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)$

   c) Si $p\in\mathbb{N}$, $p>1$ entonces $\Gamma(p)=(p-1)!$

   Ayuda: Integración por partes e inducción.