Matemáticas I

Derecho y Administración de Empresas

Hoja 7 : Integral Definida de Riemann. Función Integral. Cálculo de Áreas.

1. Sea $f(x) = x$ en el intervalo $[0,2]$ y $\mathcal{P}_n$ la partición que divide el intervalo $[0,2]$ en n partes iguales. Denotese por $s(\mathcal{P}_n)$, $S(\mathcal{P}_n)$ la suma inferior y superior, respectivamente, respecto a la función f.

   a) Calcular $s(\mathcal{P}_n)$ y $S(\mathcal{P}_n)$.

   b) Calcular $\lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n)$ y $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n)$.

   c) Con ayuda de los apartados anteriores demostrar que f es integrable en $[0,2]$ y calcular $\int_0^2 f(x)dx$.

   Ayuda: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Sea $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,3]$ y $\mathcal{P}_n$ la partición que divide el intervalo $[0,3]$ en n partes iguales. Denotese por $s(\mathcal{P}_n)$, $S(\mathcal{P}_n)$ la suma inferior y superior, respectivamente, respecto a la función f.

   a) Calcular $s(\mathcal{P}_n)$ y $S(\mathcal{P}_n)$.

   b) Calcular $\lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n)$ y $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n)$.

   c) Con ayuda de los apartados anteriores demostrar que f es integrable en $[0,3]$ y calcular $\int_0^3 f(x)dx$.

   Ayuda: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de una variable definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un racional en } [0,1] \\ 0 & \text{si } x \text{ es un irracional en } [0,1] \end{cases}$$

   ¿Es f integrable? Razone la respuesta. En caso afirmativo calcúlese $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

   Ayuda: En cualquier intervalo, por pequeño que sea, siempre hay un número racional y uno irracional.

4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1] \\ x+2 & x \in [1,3] \end{cases}$$

   a) Calcular la función integral F de f en $[0,3]$.

   b) ¿Es F continua y derivable en $[0,3]$?

   c) ¿Tiene f función primitiva?

5. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ x^2 & x \in [1,2] \\ x+2 & x \in [2,4] \end{cases}$$

a) Calcular su función integral F.
b) Calcular $F(\frac{1}{2})$, $F(2)$, $F(3)$ y $F(4)$.
c) ¿Es F continua y derivable en $[0, 4]$?

6. Calcular la función integral de $f(x) = e^{x-1} - x^2$ en el intervalo $[1, 5]$.

7. Calcular, en el caso en el que existan, las funciones primitivas de las siguientes funciones

    a) $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{x}$ en $[1, 3]$.

    b) $f(x) = \begin{cases} x & x \in [-1, 1] \\ e^x & x \in [1, 2] \end{cases}$ en $[-1, 2]$.

    c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \in [1, 2] \\ 3x^2 - 9 & x \in [2, 4] \end{cases}$ en $[1, 4]$.

8. Indicar si las funciones siguientes pueden ser funciones primitivas de alguna función en el intervalo correspondiente. En caso afirmativo, calcular la función f de la que la función F es función primitiva.

    a) $F(x) = \begin{cases} x - 1 & x \leq 0 \\ 2x - 1 & x > 0 \end{cases}$ en $[-1, 1]$.

    b) $F(x) = \begin{cases} x - 1 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$ en $[-1, 1]$.

    c) $F(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ en $[0, 2]$.

    d) $F(x) = 5e^x + x^2$ en $[-2, 5]$.

9. Sea $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

    y $F(t) = \displaystyle\int_0^t \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) dx$. Se pide:

    a) Examinar la integrabilidad de f en $[0, 2]$.

    b) Analizar la continuidad y derivabilidad de F en $[0, 2]$.

10. Sabiendo que una función f es continua en $[0, b]$ y satisface la ecuación $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = x + x^2$ para todo $x \in [0, b]$, determinar f.

11. Dibujar y calcular el área (mediante integración en ambas variables) de las regiones de $\mathbb{R}^2$ limitadas por:

    a) $y = 1$, $x = 0$ y $3x + 4y = 12$.
    b) $x = -1$, $y = x^2 - 1$, $y = |x|$ y $x = 1$.
    c) $x = 0$, $y = x$, $x^2 + y^2 = 4$ e $y = x - 2$.
    d) $2y - 3x = 6$, $2y + x + 2 = 0$, $x - y = 2$ y $3x + 2y = 6$.
    e) $y = x^2 + 2$, $y + x = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.
    f) $y^2 = 4x$ e $y = 2x - 4$.

12. Dibujar y calcular el área (mediante integración en ambas variables) de las regiones siguientes:

    a) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{cases} x^2 + y \leq 4 \\ y \geq x - 2 \\ y + 3x + 6 \geq 0 \end{cases} \right\}$.

    b) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{cases} xy \leq 2 \\ \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \end{cases} \right\}$.