Matemáticas I

Derecho y Administración de Empresas

Hoja 4 : Aplicaciones de la Diferenciabilidad

1. Hallar en cada caso el árbol de dependencias de la función compuesta:

   a) $z = f(x, y)$, donde $x = h(u, v)$ e $y = g(u, v)$.

   b) $z = f(x, y)$, donde $x = g_1(u, v)$, $y = g_2(u, v)$ y $u = h_1(t)$, $v = h_2(t)$.

   c) $z = f(a, b, c)$, donde $a = g_1(x)$, $b = g_2(a)$ y $c = g_3(b)$.

   d) $z = u^2v^3\sqrt{w}$, donde $u = x^2 + y^2$, $v = xe^{-y}$ y $w = x\ln(y)$.

2. Calcular mediante la regla de la cadena las derivadas que se indican a continuación:

   a) $\dfrac{dw}{dt}$ donde $\begin{cases} w = x^2 + y^2 - z^2\,, \\ x = e^t\cos(t)\,, \\ y = e^t sen(t)\,, \\ z = e^t\,. \end{cases}$

   b) $\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial^2 w}{\partial r\partial r}$ donde $\begin{cases} w = xyz - x - 2y - 3z\,, \\ x = 1 + rs^2\,, \\ y = 1 - rs^2\,, \\ z = rs\,. \end{cases}$

   c) $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ donde $\begin{cases} w = e^{xy}\,, \\ x = 3t + 2u\,, \\ y = 4t - 2u\,. \end{cases}$

3. Calcular aplicando la regla de la cadena $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = 0$ donde $z = xe^{x+y^2}$ y $x = t^3$ e $y = t^2 + t + 1$.

4. Sea $z = f(x^2 + y^2)$ donde f es una función derivable de una variable. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

5. Sea $w = g\left(\dfrac{y}{x}, xy\right)$ donde g es una función diferenciable de dos variables. Calcular $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

6. El nivel de "bienestar total"de una sociedad viene dado por la función: $u\,(x, z) = 6x^2 - z$, donde x es un índice de la cantidad total de bienes producidos y consumidos, y z es una medida del nivel de contaminación, que depende a su vez de x de la forma $z = x^3$. Encontrar el valor x_0 a partir del cual un aumento de la cantidad total de bienes producidos y consumidos no produce un incremento del bienestar total.

7. La función de producción de una empresa viene dada por la función: $f\,(K, L) = 10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}$, donde K es el capital invertido y L es el trabajo. Supongamos que K y L dependen del tiempo de la forma:

   $$K = 0'2t + 5 \qquad\qquad L = 5e^{0'1t}$$

   Analizar la tasa de variación de la producción en función del tiempo.

8. El nivel de bienestar de un individuo depende de su salario bruto w y de los impuestos i que paga, de acuerdo con la función $u(w,i)$ diferenciable de $\mathbb{R}^2$ tal que:

$$\frac{\partial u}{\partial w}(w,i) = \frac{1}{w^2+1} + 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial i}(w,i) = -10$$

Las leyes fiscales vigentes imponen que los impuestos sean proporcionales al salario, esto es, $i = \alpha w$, con $0 < \alpha < 1$. Demostrar que si $\alpha \leq 0'1$, se verifica que todo incremento en el salario produce un aumento en el nivel de bienestar.

9. Los ingresos de una empresa dependen del precio p y de la cantidad vendida x del bien que produce según la función $I(p,x) = px$. Suponiendo que la cantidad vendida también depende del precio:

$$x = f(p) = 20 - 2p$$

Determinar la tasa de variación de los ingresos en función del precio.

10. *a*) Calcular el polinomio de Taylor de segundo grado de $f(x,y) = e^{x+y^2}$ en el punto $(0,0)$.
    b) Sabiendo que $e^{x+y^2} = e^x e^{y^2}$, calcular el polinomio de Taylor de segundo grado de $g(x) = e^x$ en el punto $x_0 = 0$ y de $h(y) = e^{y^2}$ en el punto $y_0 = 0$. Comparar con el resultado del apartado anterior.

11. Aproximar la función $f(x,y) = x^2 + 7xy - y^2 + 3y - 2x + 1$ en un entorno del $(0,0)$ por un polinomio de Taylor de segundo grado. ¿Cúal es el error que se comete con esta aproximación?

12. Escribir el polinomio $p(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 1$ como suma de potencias de:
    a) x e y.
    b) $(x-1)$ e $(y-2)$.
    c) x e $(y-1)$.

13. Sea $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$. Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $(0,1)$. Utilizar dicho polinomio para calcular un valor aproximado de $f(0'1, 1'1)$

14. Utilizando el desarrollo de Taylor de segundo grado, calcular aproximadamente el valor de:
    a) $(1'1)^{\frac{1}{2}} + (0'1)^{\frac{1}{3}}$.
    b) $\ln\left(\frac{1}{1'06}\right) + (0'9)^3$.

15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función cuyo polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $(0,1)$ es

$$P_{2,(0,1)}(x,y) = 1 - x + 2x(y-1) - (y-1)^2$$

Calcular el vector gradiente y la matriz Hessiana de f en el punto $(0,1)$.

16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función cuyo polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $(1,-1)$ es:

$$P_{2,(1,-1)}(x,y) = 2 + (x-1) - 2(y+1) + 6(x-1)(y+1)$$

Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en el punto $(1,-1,2)$.

17. Dadas las funciones
    a) $f(x,y) = \ln\left(\frac{2x^2 - 3y^2}{x^2+y^2}\right)$.
    b) $f(x,y,z) = x^2yz - x^2z^2 + z^4 + k$ donde $k \in \mathbb{R}$.
    c) $f(x,y,z) = e^{xyz}$.
    d) $f(x,y,z) = e^{\frac{xy}{x^2+y^2}}$.

Estudiar cúales de ellas son funciones homogéneas calculando el grado de homogeneidad cuando corresponda. Para aquellas funciones que sean homogéneas comprobar que se verifica el *Teorema de Euler*.

18. Sea f una función homogénea de grado 2 y diferenciable en $\mathbb{R}^2$ tal que $f_x(1,2) = 4$ y $f_y(2,4) = 2$. Calcular $f(1,2)$.

19. Sea f una función homogénea de grado 0 de 2 variables. Demostrar que existe una función ϕ de una variable tal que
$$f(x,y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

20. Sea f una función homogénea de 3 variables, tal que
$$f_x(x,y,z) = e^{\frac{x+y}{z}}, \quad f_y(x,y,z) = \frac{x}{z}e^{\frac{y+z}{z}}, \quad f_z(x,y,z) = \frac{-xy}{z^2}e^{\frac{y+z}{z}}.$$
Determinar $f(x,y,z)$.