Matemáticas I

Derecho y Administración de Empresas

Hoja 3: Diferenciabilidad de funciones de varias variables

1. Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de las siguientes funciones:

   a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y - x$.

   b) $f(x, y) = e^{2x+y^2}$.

   c) $f(x, y) = x^2e^{\frac{y}{x}}$.

   d) $f(x, y) = \ln(xy)$.

   e) $f(x, y, z) = e^{x-z} + y\ln(x + z)$.

2. Calcular el vector gradiente de las funciones del ejercicio anterior en los siguientes puntos:

   a) $(1, 1)$.

   b) $(0, 0)$.

   c) $(1, 0)$.

   d) $(-1, -1)$.

   e) $(1, 0, 1)$.

3. Calcular el vector gradiente de las funciones que se indican a continuación, en un punto genérico (x, y) (ó (x, y, z) según corresponda).

   a) $f(x, y) = xe^{\frac{x}{y}}$.

   b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   c) $f(x, y, z) = xe^z + y\cos(x + z)$.

4. Probar que la función $z = \dfrac{1}{2}(e^y - e^{-y})sen(x)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,.$$

5. Estudiar la continuidad y la existencia de las derivadas parciales primeras en el punto $(0, 0)$ de las siguientes funciones:

   a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

   b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{si } x + y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x + y = 0. \end{cases}$

6. Calcular la derivada direccional de las funciones que se indican a continuación, en los puntos P y respecto de los vectores $\vec{v}$ que se señalan. Asimismo, calcular en cada caso el valor máximo de las derivada direccional indicando con respecto a que vector se alcanza dicho valor máximo.

   a) $f(x, y) = xy$, donde $P = (2, 3)$ y $\vec{v} = (1, 1)$.

   b) $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$, donde $P = (1, 1)$ y $\vec{v}$ es un vector paralelo al eje OX.

   c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, donde $P = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (1, 2, -1)$.

   En los dos primeros apartados dibujar la curva de nivel que incluya al punto P, y el vector gradiente correspondiente al punto P.

7. Comprobar la existencia de las derivadas direccionales en el punto $(0, 0)$ respecto a cualquier vector unitario $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ para las siguientes funciones:

   a) $f(x, y) = e^{x+y}$.

   b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

   ¿Que se puede decir de la continuidad de ambas funciones en el punto $(0, 0)$?

8. Analizar la diferenciabilidad de las siguientes funciones:

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

   b) $f(x, y) = \begin{cases} e^{x^2 y} & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$

   c) $f(x, y) = \begin{cases} x^4 + \sqrt[3]{y - 1} & \text{si } y \neq 1, \\ 0 & \text{si } y = 1. \end{cases}$

9. Dada la función $f(x, y) = e^{x^2+y}$, se pide:

   a) Demostrar que $f(x, y)$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

   b) Calcular el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, -1)$.

10. Considérese la superficie $z = f(x, y)$ dada por la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. Se pide:

   a) Ecuación de la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 2$ en el punto $(1, 1)$.

   b) Ecuación de la recta tangente a la curva intersección de la gráfica de f y el plano $y = 1$ en el punto $(1, 1)$.

   c) Ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1, 2)$.