1. Sea K un cuerpo y denotemos el anillo de series formales con coeficientes en K por $K[[x]]$. Esto es,

$$K[[x]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \,\middle|\, a_n \in K\,,\, \forall n \right\}.$$

   (a) Demostrar que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \in K[[x]]$ es invertible si y sólo si $a_0 \neq 0$.
   (b) Demostrar que $K[[x]]$ es un anillo local.
   (c) Calcular los elementos de $Spec(K[[x]])$.
   (d) Demostrar que $K[[x]]$ es un dominio de factorización única.

2. Sea A un domino de factorización única y K su cuerpo de fracciones. Demostrar que si $\alpha \in K \setminus A$, entonces α no es entero sobre A.

3. Sea K un cuerpo infinito y $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f \neq 0$. Demostrar que existe $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ tal que $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

4. Sea A un anillo. Demostrar que si A es un domino de factorización única entonces A tiene infinitos irreducibles distintos no asociados.

A. Demostrar que la extensión de anillos

$$\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{R}[x,y]/ < xy - 1 >$$

no es entera.

B. Demostrar $\dim_{\text{Krüll}} (\mathbb{R}[x,y]/ < xy - 1 >) = 1$.

C. Calcular $\dim_{\text{Krüll}} \big(\mathbb{R}[x,y,z]/ < z^3 - xy >\big)$.

INSTRUCCIONES:

- Entregar los ejercicios del 1 al 4.
- Entregar al menos uno de los ejercicios A, B ó C. Si quieres entregar mas de uno será tenido en cuenta.