Matemáticas II

Prácticas: Diagonalización

1. Demostrar que $\vec{v} = (2, 3)$ es un autovector de autovalor 4 del endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido como $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$.

2. Estudiar si las aplicaciones lineales que se indican a continuación tienen como autovalores y autovectores asociados los que se indican en cada uno de los casos:

   a) $f(x, y) = (x + 2y, -y)$, $[\lambda = 1, \vec{v} = (1, 0)]$.

   b) $f(x, y, z) = (x - y + z, y - 2z, x + 5z)$, $[\lambda = 3, \vec{v} = (1, 1, 1)]$.

   c) $f(x, y, z, t) = (x + y, x - z, y + z, t)$, $[\lambda = 0, \vec{v} = (1, -1, 1, 0)]$.

3. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ con autovalor α y g otro endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ con autovalor β ¿Es $\alpha + \beta$ un autovalor de $f + g$?

4. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $f(x, y) = (-3x - 2y, 12x + 7y)$.

   a) Demostrar que $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$ son autovalores de f.

   b) Calcular las ecuaciones cartesianas y paramétricas de los subespacios vectoriales $V(1)$ y $V(3)$.

   c) Calcular una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores de f.

5. Calcular una base de autovectores de el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por $f(x, y, z) = (4x + y - z, 2x + 5y - 2z, x + y + 2z)$.

6. Calcular los autovalores y autovectores para las siguientes matrices:

   a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

   b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   d) $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   e) $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. Dados los siguientes endomorfismos de $\mathbb{R}^3$, estudiar si existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de cada uno de estos endomorfismos.

   a) $f(x,y,z) = (x+4z, 2x-y-4z, 3z)$.

   b) $f(x,y,z) = (7x+4y-z, 4x+7y-z, -4x-4y+4z)$.

   c) $f(x,y,z) = (4x-2y, -2x+3y-2z, -2y+2z)$.

8. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Calcular α y β si sabemos que $\lambda = 1$ y $\lambda = 5$ son los autovalores de f.

9. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & \beta \end{pmatrix}$. Calcular α y β para que el vector $(-2,1)$ sea un autovector de autovalor $\lambda = 5$ en la matriz A. Calcular una base de $V(5)$. ¿Cuál es el valor del otro autovalor en ese caso?

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ se pide:

    a) ¿Qué relación deben verificarse entre los parámetros α, β y γ para que A tenga un autovalor triple?

    b) Suponiendo que $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\gamma = 0$, calcular los autovalores y autovectores de A.

11. Sean $A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tal que P es no singular. Demostrar que las matrices A y $B = PAP^{-1}$ tienen el mismo polinomio característico.

12. Demostrar que si λ es un autovalor de una matriz idempotente A, es decir $A^2 = A$, entonces $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$. Además probar que los vectores columna no nulos de A son autovectores de autovalor $\lambda = 1$.

13. Demostrar que si λ es un autovalor de una matriz ortogonal A, es decir $AA^t = A^tA = I_n$, y no singular entonces $1/\lambda$ es también un autovalor de A.

14. Calcular los autovalores de una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $rango(A) = 1$ y $traza(A) = 2$.

15. Estudiar si los siguientes endomorfismos son diagonalizables. Para aquellos casos en los que lo sean, calcular una base $\mathcal{B}$ de autovectores de $\mathbb{R}^3$ y la matriz diagonal D correspondiente.

    a) $f(x,y,z) = (x, 2y, 2y+z)$.

    b) $f(x,y,z) = (-3x-8y+4z, 3y, 3z-2x)$.

    c) $f(x,y,z) = (x+2y, y+3z, z)$.

16. Estudiar si son diagonalizables las matrices siguientes, calculando, cuando sea posible, las matrices P y D para las que se verifica $A = PDP^{-1}$.

    a) $A = \begin{pmatrix} 5/7 & -16/7 \\ -12/7 & 9/7 \end{pmatrix}$.

    b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

    c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

    d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

    e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

f) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

g) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

h) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

17. Para las matrices del ejercicio anteriores que sean diagonalizables, calcular $det(A)$, $det(D)$, $tr(A)$, $tr(D)$ y relacionarlos.

18. Hallar una matriz cuadrada de orden 2 que tenga como autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$ y con autovectores asociados $\vec{v}_1 = (1, 0)$ y $\vec{v}_2 = (3, 1)$ respectivamente.

19. Estudiar para qué valores de los parámetros son diagonalizables las matrices

    a) $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

    b) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    c) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Diagonalizar las siguiente matrices simétricas calculando una matriz de autovectores ortonormal.

    a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

21. Calcular los autovalores de las matrices inversas de:

    a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

    b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

22. Calcular A^n con $n \in \mathbb{N}$ para las siguientes matrices:

    a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

    b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

23. Los informativos nocturnos de las cadenas de televisión WW y R7 compiten por la audiencia en la misma franja horaria. Diversos estudios muestran que el 60 % de los telespectadores del informativo de WW lo siguen siendo el día siguiente, mientras que el 40 % restante pasan a ver el de R7. Además, de los espectadores del informativo de R7, el 70 % continúan siéndolo el día después, mientras que el otro 30 % prefieren ver el de WW. Si se supone que la audiencia total permanece constante y que hoy se han repartido la audiencia al 50 %, determinar los porcentajes de espectadores de cada informativo al cabo de una semana.

24. Las coordenadas en las que se encuentra una esfera en el espacio en cada periodo de tiempo t está determinada por las tres variables (x_t, y_t, z_t). En cada periodo de tiempo la posición de la esfera experimenta la siguiente transformación:

$$\begin{cases} x_t = 2x_{t-1} + 5y_{t-1} + 10z_{t-1} \\ y_t = 10y_{t-1} - 10z_{t-1} \\ z_t = 5z_{t-1} \end{cases}$$

    a) Calcular la posición de la esfera trascurridos 100 periodos de tiempo, si la posición inicial es $(x_0, y_0, z_0) = (5, 5, 5)$.

    b) Calcular la posición a que tiende la esfera cuando el tiempo trascurrido tiende a infinito.

25. Una agencia de transportes tiene su flota de camiones repartida entre Madrid y Barcelona. De los camiones que hay en Madrid al principio de cada mes, dos tercios vuelven a Madrid al final del mismo mes y el resto a Barcelona. En el caso de los que hay en Barcelona, tres cuartos vuelven a Barcelona y el resto a Madrid.

    a) Si la flota permanece constante e inicialmente hay la mitad de camiones en cada ciudad, calcular los porcentajes que hay en cada ciudad trascurrido un año.

    b) Calcular el porcentaje de camiones que hay en cada ciudad al cabo de infinitos meses.

CUESTIONES:

1. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Los autovectores asociados a un mismo autovalor son siempre linealmente dependientes

   b) Los autovectores asociados a dos autovalores diferentes son siempre linealmente independientes.

   c) El número de autovalores distintos de una matriz es siempre menor o igual al grado del polinomio característico de dicha matriz.

   d) Si una matriz cuadrada no es invertible, entonces $\lambda = 0$ es un autovalor de dicha matriz.

   e) Si A es una matriz cuadrada y $\lambda = 5$ es uno de los autovalores, entonces el sistema de ecuaciones $(A - 5I_n) = \vec{0}$ es compatible determinado.

2. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz no singular y $\lambda \in \mathbb{R}$ uno de sus autovalores con autovector asociado $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Entonces se verifica:

   a) $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1} con autovector asociado $\vec{v}$.

   b) λ^3 es un autovalor de A^3 con autovector asociado $\vec{v}$.

   c) 4λ es un autovalor de $4A$ con autovector asociado $4\vec{v}$.

   d) λ es un autovalor de A^t con autovector asociado $\vec{v}$.

3. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ autovectores correspondientes a sus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica que el vector $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$ es un autovector de A para cualquier valor de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

   a) Falso, ya que no existe ningún escalar λ que verifique $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

   b) En general es falso, aunque es cierto cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, ya que en este caso cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ se tiene que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

   c) Es verdadero, pues una combinación lineal de autovectores de una matriz es siempre un autovector de dicha matriz.

4. Indicar si son verdaderas o falsas las siguiente afirmaciones:

   a) Si $|A| = 0$, entonces la matriz A no es diagonalizable.

   b) Si $|A| \neq 0$ y A es diagonalizable, entonces la matriz A^{-1} también es diagonalizable.

   c) Si A y B son matrices diagonalizables, entonces $A + B$ también lo es.

   d) Si A es diagonalizable, A^k con $k \in \mathbb{N}$ también lo es y los autovectores de ambas matrices coinciden.

5. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matriz simétrica tal que $rg(A) = 1$ y existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ no nulo, para el que se verifica que $A\vec{v} = \vec{v}$. Entonces se tiene que:

   a) $\lambda = 0$ es un autovalor de A.

   b) A no es diagonalizable.

   c) El vector $\vec{v}$ es ortogonal a cualquier solución del sistema de ecuaciones compatible indeterminado $A\vec{x} = \vec{0}$.

   d) Los autovalores de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ (doble) y la matriz A es idempotente.

6. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matriz simétrica tal que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$son autovalores de A y $tr(A) = 0$. Entonces se tiene $|A^7| = (-2)^7$.

   a) Verdadero, ya que $|A| = -2$ y $|A^7| = |A|^7 = (-2)^7$.

   b) Falso, pues no tenemos información suficiente para determinar A^7 y, por tanto, no podemos calcular $|A^7|$.

   c) Verdadero, ya que A es diagonalizable y, por tanto,

   $$A^7 = PD^7P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^7 \end{pmatrix} P^{-1}$$

   de donde $|A^7| = |P|(-2)^7|P^{-1}| = (-2)^7$.

7. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matriz idempotente tal que $\lambda_1 = 1$ es una raíz simple de la ecuación característica de A. Entonces se verifica $dim(V(0)) = 2$.

   a) Verdadero, pues A es diagonalizable por ser idempotente y, en consecuencia, $dim(V(0)) = 3 - dim(V(1)) = 2$.

   b) Falso, lo único que puede afirmarse es que $dim(V(0)) \leq 2$.

   c) Falso, ya que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ cumple la hipótesis del enunciado y, sin embargo $dim(V(0)) = 1$.

8. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando la respuesta.

   a) Si $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ es idempotente y $rg(A) = 3$ entonces tiene únicamente un sólo autovalor nulo.

   b) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\lambda = 0$ es un autovalor de A. Entonces el sistema homogéneo dado por $A\vec{x} = \vec{0}$ es compatible indeterminado.

9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$y $f(\vec{v}) = 3\vec{v}$ para ciertos vectores no nulos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Entonces, si A es la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases canónicas, se puede afirmar que A es diagonalizable.

   a) Falso, pues no tenemos datos suficientes para garantizar que A es diagonalizable.

   b) Verdadero, pues los autovalores de f coinciden con los autovalores de A y como en este caso son distintos se puede asegurar que A es diagonalizable.

   c) En general es falso, aunque sería cierto si $rg(A) = 2$, pues en este caso $det(A) = 0$.