**Matemáticas II**

**Prácticas: Sistemas de ecuaciones lineales**

1. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, escribirlos en forma matricial y vectorial.

   *a*) $\left\{\begin{array}{c} -x-y+z=0 \\ y-2z=0 \\ -x+2y-5z=0 \end{array}\right.$

   *b*) $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ 2x-y+3z=4 \\ 2y-z=1 \end{array}\right.$

   *c*) $\left\{\begin{array}{c} 2x_1+3x_2+x_3-x_4+x_5=4 \\ -x_1+x_2+7x_4-x_5=2 \\ 3x_1+2x_2-x_3+x_5=1 \\ -x_2+2x_3+x_4-3x_5=0 \end{array}\right.$

2. Estudiar la compatibilidad o incompatibilidad de cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

   *a*) $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=5 \end{array}\right.$

   *b*) $\left\{\begin{array}{c} x+5y=3 \\ 5x+25y=15 \\ -x-5y=3 \end{array}\right.$

   *c*) $\left\{\begin{array}{l} x+2y=1 \\ 2x+y=1 \end{array}\right.$

   *d*) $\left\{\begin{array}{c} 5x-11y+9z=4 \\ 3x-7y+7z=k \\ x-y-3z=-1 \end{array}\right.$ dependiendo de los valores de $k \in \mathbb{R}$

3. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{c} x+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ 3x+3y+2z=5 \end{array}\right.$$

   *a*) Obtener la forma matricial del sistema $A\vec{x}=\vec{b}$.

   *b*) Sea $f:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal con $A$ como matriz asociada. Calcular el subespacio vectorial $Ker(f)$.

   *c*) Comprobar que los valores $x=4$, $y=-1$ y $z=-2$ son solución del sistema, es decir, el vector $\vec{v}=(4,-1,-2)$ verifica $f(\vec{v})=\vec{b}$, o, de forma equivalente $A\vec{v}=\vec{b}$.

   *d*) Comprobar que el vector $\vec{w}=(-3,1,3)$ pertenece a $Ker(f)$, es decir, $f(\vec{w})=\vec{0}$, o, de forma equivalente $A\vec{v}=\vec{0}$.

   *e*) Comprobar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica que $\vec{v}+\lambda\vec{w}$ es también solución del sistema.

4. Estudiar y resolver cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

*a*) $\left\{\begin{array}{c} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = a \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = b \end{array}\right.$ en función de $a, b \in \mathbb{R}$.

*b*) $\left\{\begin{array}{c} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 5x_2 = a \end{array}\right.$ en función de $a \in \mathbb{R}$.

*c*) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

*d*) $\begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

*e*) $\left.\begin{array}{c} ax - y - z = 1 \\ x - ay - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{array}\right\}$ en función de $a \in \mathbb{R}$.

*f*) $\left.\begin{array}{c} x + y + az = 3 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{array}\right\}$ en función de $a \in R$.

5. En los siguientes sistemas lineales calcular para qué valores del parámetro $a \in R$ el sistema es

- Incompatible.
- Compatible determinado.
- Compatible indeterminado.

*a*) $\left\{\begin{array}{c} x - y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + \left(a^2 - 5\right) z = a \end{array}\right.$

*b*) $\left\{\begin{array}{c} ax - 2y + z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + z = 1 \end{array}\right.$

*c*) $\left\{\begin{array}{c} x + y + az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{array}\right.$

6. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$f\left(x, y, z\right) = \left(2x + 3y, x + 2z, x + 6y - 6z\right)$$

*a*) ¿De qué sistema de ecuaciones lineales son solución los vectores pertenecientes al $Ker(f)$? ¿Cuál es la dimensión del subespacio vectorial $Ker(f)$?

*b*) Determinar el sistema de ecuaciones cuyas soluciones son los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tales que $f\left(\vec{x}\right) = (0, -1, 3)$. Comprobar que $(3, -2 - 2)$ y $(-6, 4, 5/2)$ son soluciones del sistema planteado. ¿Qué conclusión se puede extraer sobre la existencia de la aplicación lineal inversa $f^{-1}$?

7. Estudiar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} \left(1 + a\right) x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \left(1 + a\right) x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + \left(1 + a\right) x_3 = a^2 \end{array}\right.$$