Matemáticas II

Prácticas: Aplicaciones Lineales

1. Demostrar si las siguientes aplicaciones son o no lineales:

   a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x+1, y+2)$.
   b) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = (x,y,0)$.
   c) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = 2x - 3y + 4z$.
   d) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy$.
   e) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (|x|, 0)$.
   f) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y) = (2x, 2y, x+y)$.
   g) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = \left(x^2, y^2\right)$.

2. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

   a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+y, z)$.
   b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, 0)$.
   c) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x, y+2)$.
   d) $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, $f(A) = AB$ donde $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   e) $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(A) = A + B$ donde $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es fija.
   f) $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(A) = AB - BA$ donde $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es fija.
   g) $f:\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $f(p(x)) = p(x+1)$.
   h) $f:\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $f(p(x)) = p(x) + 1$.

3. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y V'. Demostrar las siguientes proposiciones:

   a) La imagen del elemento neutro de V mediante f es el elemento neutro de V', es decir, $f(\vec{0_V}) = \vec{0_{V'}}$.
   b) La imagen mediante f del opuesto de un elemento $\vec{v} \in V$ es el opuesto de $f(\vec{v})$, es decir, $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.
   c) La imagen mediante f de cualquier subespacio de V es un subespacio vectorial de V'.
   d) La imagen mediante una aplicación lineal de un subespacio vectorial de dimensión k es un subespacio vectorial de dimensión no superior a k.
   e) Sea $B = \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ una base del espacio vectorial V y sean $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$,...,$\vec{w}_n$, n vectores cualesquiera del espacio vectorial V'. En estas condiciones, existe una única aplicación lineal f de V a V' tal que:

   $$f(\vec{e}_j) = \vec{w}_j, j = 1, 2, ..., n$$

4. Dadas las siguientes aplicaciones lineales:

   $$\begin{array}{rll} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 & \text{dada por} & f(x,y,z) = (2x, y+z) \ , \\ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 & \text{dada por} & g(x,y,z) = (x-z, y) \ , \\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & \text{dada por} & h(x,y) = (y,x) \ , \end{array}$$

   hallar las aplicaciones siguientes:

a) $2f - 5g$.

b) $h \circ f$.

c) $h \circ g$.

d) $h \circ (f + g)$.

5. Para las siguientes aplicaciones lineales hallar la dimensión y una base de los subespacios vectoriales Núcleo $Ker\,(f)$ e Imagen $Im(f)$:

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + y, 0)$.

   b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x, 2y, x + z)$.

   c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$

6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x, y, z) = (x + y, z, x + z)$. Encontrar la matriz de f con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar la imagen mediante f de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

   a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}$.

   b) $W_2 = \{(x, y, 0) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$.

   c) $W_3 = \{(x, y, z) = t(1, -1, 1) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

   En cada caso indicar la dimensión del subespacio y la dimensión de su imagen mediante f.

7. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y, z) = (x - y, x + z)$.

   a) Probar que f es una aplicación lineal.

   b) Determinar las ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y de la imagen.

   c) Encontrar una base del núcleo y otra de la imagen.

   d) Comprobar que se verifica $dim(\mathbb{R}^3) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$.

   e) Clasificar f.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f\,(-1, 2) = (1, 3, -2)$ y $f\,(1, 4) = (1, -2, 5)$. Hallar $f\,(0, 6)$, $f\,(2, -4)$, $f\,(2, 2)$.

CUESTIONES:

1. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores linealmente dependientes de $\mathbb{R}^n$ y f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces $f(\vec{u})$ y $f(\vec{v})$ son linealmente dependientes.

   b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$ y f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces $f(\vec{u})$ y $f(\vec{v})$ son linealmente independientes.

   c) Si W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces $f(W)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

   d) Si f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $Ker(f) = \{\vec{0}\}$, entonces $Im(f) = \mathbb{R}^n$.

2. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que para $\vec{v} = (1, 2, 3)$ se verifica que $f(3\vec{v}) = (3, 6, 9)$, entonces f es lineal.

   b) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal , entonces $Im(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ con dimensión menor o igual que 2.

   c) Dado $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, entonces el conjunto $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), ..., f(\vec{u}_n)\}$ es linealmente independiente siempre que $m \geq n$ y linealmente dependiente cuando $m < n$.

   d) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal tal que $Ker(f) = \{\vec{0}\}$, entonces se verifica que $m \geq n$.