Matemáticas II

Prácticas: Matrices y Determinantes

1. Sean las matrices cuadradas siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

   Se pide calcular:

   a) $2A - 3B + C$.
   b) $2A^2 - 3AB + AC$.
   c) $2A^2B - 3AB^2 + ACB$.

2. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

   Se pide calcular:

   a) $B + C$.
   b) AB.
   c) BA.
   d) $A(B + C)$.
   e) $A(2B - 3C)$.

3. Hallar x, y, z y w si

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w-1 & 2w+3 \end{pmatrix}$$

4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

   calcular AB y BA.

5. Hallar las matrices que conmutan con A, es decir $AB = BA$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Probar que las matrices AA^t y A^tA están definidas para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$

7. Encontrar AA^t y A^tA donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ calcular A^2 y A^3. Hallar $f(A)$ donde $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 5$.

9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ encontrar un vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ no nulo tal que $A\vec{u} = 3\vec{u}$.

10. Dado el conjunto :

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R}) \ | \ a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0; \ 2a_{22} = a_{11}\}$$

Se pide:

a) Comprobar que W es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R})$.

b) Determinar la dimensión de W y hallar una base.

11. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

calcular

a) $A \otimes B$.

b) $B \otimes A$.

c) $B \otimes C$.

d) $A \otimes C$.

12. Hallar la traza de las matrices A, B, C y $B + C$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Hallar el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 5 & 8 & 16 \\ 4 & 2 & 6 & 12 \\ 5 & 6 & 12 & 23 \end{pmatrix}$

14. Sean A, B, y C matrices regulares (no singular) del mismo orden nxn. Demostrar que si:

$$AB = AC \quad \Rightarrow \quad B = C$$

(**Observación:** Si A no es regular el resultado no es cierto).

15. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \ ; \ D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Compruebese que:

a) $C = A^{-1}$.

b) $D = B^{-1}$.

c) $C + D \neq (A+B)^{-1}$.

16. Hallar las inversas de las siguientes matrices a través de transformaciones elementales.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

17. Determinar si alguna de las siguientes matrices es triangular, diagonal, simétrica, antisimétrica, ortogonal, idempotente, unipotente, nilpotente, positiva, estocástica o doblemente estocástica:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \\
A_4 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
A_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \quad A_9 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/8 & 5/8 \\ 1/4 & 5/8 & 1/8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

18. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}$$

19. Hallar la inversa de las matrices anteriores, en el caso de que exista.

20. Demostrar que si a, b y c son números reales, las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$$

son reales.

21. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

22. Calcular los siguientes determinantes mediante su desarrollo por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

23. Calcular los siguientes determinantes reduciéndolos a una matriz triangular superior mediante operaciones elementales:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

24. Calcular los siguientes determinantes usando sus propiedades y efectuando un número reducido de computaciones

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

25. Calcule los siguientes determinantes de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix};$$

26. Calcule $\det(AB)$, $\det(BA)^t$, $\det\left(ABA^{-1}B\right)$, $\det\left(BB^{-1}\right)$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

27. Comprobar, sin desarrollar, que el determinante de la matriz A es múltiplo de 9:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 4 \\ 3 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

28. Demostrar el siguiente determinante conocido como determinantes de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(b-c)(b-d)(c-d)$$

29. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & (2a-1) & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & a \end{pmatrix}$$

Determinar el rango de A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

30. Determinar los valores de α y β para que el rango de la siguiente matriz sea lo más pequeño posible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

31. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz $Adj(A)$.

b) Calcular $|A|$.

c) Comprobar que: $A \cdot Adj\,(A)^t = Adj\,(A)^t \cdot A = |A|\,I$

d) Calcular A^{-1}.

32. Determine si las siguientes matrices son invertibles y en caso afirmativo calcule la matriz inversa por el método de los adjuntos.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

33. Determinar para que valores de a son invertibles las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & a \end{pmatrix}$$

34. Hallar la inversa de las matrices anteriores, en el caso de que exista.

35. Hallar las inversas de las siguientes matrices, calculando primero la matriz de cofactores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

36. Encontrar los valores de a para que las matrices siguientes sean invertibles:

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ 0 & 1 & a-3 \end{pmatrix}$$

37. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -10 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 5 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Particionar A y B en cuatro bloques y calcular $A + B$

b) Particionar A y B en seis bloques y calcular $A - 2B$

c) Particionar de forma adecuada A y C para poder calcular, multiplicando pr bloques, la matriz CA

d) Efectual una partición diferente de la realizada en (*c*) que permita calcular CB.

CUESTIONES:

1. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{R})$ se verifica que $rg\,(A) = \text{mín}\,\{m, n\}$.

   b) Dadas A, $B \in \mathcal{M}_{3x2}(\mathbb{R})$ con $rg\,(A) = 2$ y $rg\,(B) = 1$ se verifica que $rg\,(A + B) = 3$.

   c) Sean A, $B \in \mathcal{M}_{3x3}(\mathbb{R})$ tales que $AB = O_{3x3}$. Entonces se verifica que $A = O_{3x3}$ o bien $B = O_{3x3}$.

2. Sean A y B dos matrices simétricas de orden 3, tales que $rg\,(A) = 3$ y $rg\,(B) = 2$. Se verifica entonces que la matriz $C = AB$ es simétrica e invertible.

   a) Verdadero, porque el producto de matrices simétricas es una matriz simétrica y como

   $$rg\,(AB) \geq \text{máx}\,\{rg\,(A)\,, rg\,(B)\}$$

   entonces $rg\,(AB) = 3$ y $C = AB$ es invertible.

   b) Es cierto que $C = AB$ es una matriz simétrica por ser producto de dos matrices simétricas, pero es falso que sea invertible, pues si exixtiese C^{-1} sería:

   $$C^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

   y esto no es posible al ser B una matriz no invertible.

   c) Falso, ya que

   $$rg\,(AB) \leq \text{mín}\,\{rg\,(A)\,, rg\,(B)\} = 2$$

   no siendo, por tanto, $C = AB$ invertible. Además al multiplicar matrices simétricas, en general no se obtiene como resultado una matriz simétrica.

3. Para matrices de orden n analizar si son verdaderas o falsas cada una de las afirmaciones siguientes, demostrándolas en caso afirmativo y dando un contraejemplo en caso contrario:

   a) Si A y B son invertibles, entonces $A + B$ también lo es.

   b) Si A y B son invertibles, entonces AB también lo es.

   c) Si A es invertible, entonces αA también lo es para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

   d) Si A es invertible, entonces A^3 también lo es, siendo $\left(A^3\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^3$.

4. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Dada una matriz no singular $A \in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{R})$ se verifica que $tr\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{tr(A)}$ y $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$.

   b) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden se cumple que:

   $$tr\,(AB) = tr\,(BA) \quad y \quad |AB| = |A|\,|B|$$

   c) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden se cumple que si $rg\,(A) = rg\,(B)$ entonces $|A| = |B|$.

   d) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden y $|A| = |B|$ entonces $rg\,(A) = rg\,(B)$.

5. Dadas las matrices

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

   con $\alpha \neq 0$, se verifica:

   a) $|A| = \alpha^4$.

   b) $|A| = -\,|D|$.

   c) $|A + D| = 0$.

   d) La matriz $A^{-1}D$ es simétrica.

e) $rg\,(A) = rg\,(D)$.

6. Sean A y $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dos matrices tales que $|A|\,|B| = 1$. Entonces se verifica que B es la matriz inversa de A

   a) Falso, lo único que podemos afirmar es que ambas matrices son invertibles.

   b) Verdadero, ya que
   $$|B| = \frac{1}{|A|} = \left|A^{-1}\right|,$$
   entonces $B = A^{-1}$.

   c) Falso, la firmación del enunciado sólo es cierta cuando
   $$B = \frac{1}{|A|} \cdot Adj\,(A)$$

7. Dada la matriz:
   $$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   se verifica que:
   $$rg\,(A) = 4$$
   para todo $a \in \mathbb{R}$.

   a) Verdadero, pues para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $|A| = 1$.

   b) Falso, ya que si $a = 0$ entonces $rg\,(A) = 3$.

   c) Falso, el rango de A es siempre inferior a 4 cualquiera que sea el valor de $a \in \mathbb{R}$, ya que $|A| = a\,|B|$ con
   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   siendo $|B| = 0$.