Matemáticas II

Prácticas: Espacios Vectoriales

1. Dados los vectores $\vec{u} = (2, 3, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, -2)$. Calcular:
   (a) $2\vec{u} - 5\vec{w}$.
   (b) El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{w}$.
   (c) $5\vec{v_1} + 3\vec{v_2} - \vec{v_3}$, siendo $\vec{v_1} = 2\vec{u} - 5\vec{w}$, $\vec{v_2} = \alpha\vec{w}$ con $\alpha = \vec{u} \cdot \vec{w}$ y $\vec{v_3} = \vec{w} - 3\vec{u}$.
   (d) El módulo de $\vec{u}$ y de $\vec{w}$.

2. Sea $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector cualquiera no nulo. Demostrar que el vector $\vec{w} = \dfrac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ tiene módulo unitario.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (2, -2)$ de $\mathbb{R}^2$. Se pide:
   (a) Calcular gráficamente el vector $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$.
   (b) Dibujar el vector $\dfrac{\vec{w}}{||\vec{w}||}$.

4. Dados los vectores $\vec{v}_1 = (2, 5, 1, 3)$, $\vec{v}_2 = (10, 1, 5, 10)$ y $\vec{v}_3 = (4, 1, -1, 1)$, hallar el vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$ que verifica
   (a) $3(\vec{v}_1 - \vec{w}) + 2(\vec{v}_2 + \vec{w}) = 5(\vec{v}_3 + \vec{w})$.
   (b) $\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 4\vec{v}_3 + 2\vec{w} = \vec{0}$.

5. Sean los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ con $\vec{w} \neq \vec{0}$ verificando $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$. ¿Se puede asegurar en este caso que $\vec{u} = \vec{v}$? Razonar la respuesta dando, en caso de ser falso, un contraejemplo.

6. Sean los vectores $\vec{u} = (3, 4), \vec{v} = (1, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. Determinar el valor de α en cada uno de los siguiente apartados para que
   (a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.
   (b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.
   (c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen un ángulo de 60^o.
   (d) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan igual módulo.

7. Sea $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales, es decir:

   $$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1\, x + \ldots + a_n\, x^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

   Demostrar que este conjunto con las operaciones habituales de suma y producto por un número real de polinomios es un espacio vectorial.

8. Sea $\mathcal{C}([a, b])$ el conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, es decir,

   $$\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ continua en } [a, b]\ \}\,.$$

   Demostrar que este conjunto con las operaciones habituales de suma y producto por un número real de funciones es un espacio vectorial.

9. Sea $\mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices con 2 filas y 3 columnas, es decir,

$$\mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array} \right) \Big| \; a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demostrar que este conjunto con las operaciones habituales de suma y producto por un número real de matrices es un espacio vectorial.

10. En $\mathbb{R}^2$ se definen las siguientes operaciones

$$\begin{array}{l} (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \lambda \odot (x, y) := (\lambda x, y), \;\; \lambda \in \mathbb{R}. \end{array}$$

¿Es $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial?

11. Indicar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales o no de los espacios vectoriales que se indican en cada uno de los apartado siguientes:

    (a) $W_1 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = z\big\}$ de $\mathbb{R}^3$.
    (b) $W_2 = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = 1\big\}$ de $\mathbb{R}^4$.
    (c) $W_3 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, \; y \geq 0\big\}$ de $\mathbb{R}^2$.
    (d) $W_4 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y, \; 2x + z = 0\big\}$ de $\mathbb{R}^3$.
    (e) $W_5 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0 \text{ ó } y = 0\big\}$ de $\mathbb{R}^2$.
    (f) $W_6 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - 3y = 0\big\}$ de $\mathbb{R}^2$.
    (g) $W_7 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\big\}$ de $\mathbb{R}^3$.
    (h) $W_8 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 1\big\}$ de $\mathbb{R}^3$.
    (i) $W_9 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z = 0\big\}$ de $\mathbb{R}^3$.
    (j) $W_{10} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, e^x + y = 0\big\}$ de $\mathbb{R}^2$.

12. Una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el $(0, 0)$ viene dada por un conjunto de la forma

$$W = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ax + by = 0\big\}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

13. Un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el $(0, 0, 0)$ viene dada por un conjunto de la forma

$$W = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, ax + by + cz = 0\big\}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demostrar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

14. Una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el $(0, 0, 0)$ viene dada por un conjunto de la forma

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz = 0 \\ dx + ey + fz = 0 \end{array} \right. \right\}$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b, c) \neq \lambda(d, e, f)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostrar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

15. Dado el espacio vectorial $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$, decidir cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}[x]$ son subespacios vectoriales:

    (a) $\mathbb{R}_4[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, \text{grado}(p(x)) \leq 4\}$.
    (b) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, \text{grado}(p(x)) = 4\}$.

16. Dado el espacio vectorial $(\mathcal{C}([a, b]), +, \cdot)$, determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{C}([a, b])$ son subespacios vectoriales:

    (a) $\mathcal{C}_0 = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) \,|\, f(a) = 0\}$.

(b) $\mathcal{C}_1 = \{f \in \mathcal{C}([a,b]) \,|\, f(a) = f(b)\}$.

(c) $\mathcal{C}_1 = \{f \in \mathcal{C}([a,b]) \,|\, f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]\}$.

17. Dado el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$, determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales:

    (a) $W_1 = \{M \in \mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \,|\, \det(M)) \neq 0\}$.

    (b) $W_2 = \{M \in \mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \,|\, \det(M)) = 0\}$.

18. En $\mathbb{R}^2$ se consideran los siguientes subconjuntos

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\},$$
$$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}.$$

    (a) Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

    (b) Calcular $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$ y $W_1 + W_2$.

    (c) Demostrar cuáles de los tres subconjuntos anteriores son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

    (d) Comprobar si se verifica que $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$.

19. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x = y,\ 2z = t\},$$
$$W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\},$$
$$W_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z = t\}.$$

    Se pide:

    (a) Calcular los subespacios vectoriales $W_1 + W_2$, $W_1 + W_3$ y $W_2 + W_3$.

    (b) Calcular los subespacios vectoriales $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cap W_3$ y $W_2 \cap W_3$.

    (c) ¿Son suplementarios W_1 y W_2? ¿Y W_2 y W_3?

20. Dados los vectores $\vec{u} = (1,2,1)$ y $\vec{v} = (0,1,1)$, calcular el conjunto

$$S = \{\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

    Comprobar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

21. Escribir el vector $(2,6) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de:

    a) $(1,2)$ y $(-1,0)$.

    b) $(1,1)$, $(1,0)$ y $(2,3)$.

    ¿Son estas combinaciones lineales las únicas posibles para el vector $(2,6)$?

22. Escribir, si es posible, el vector $(1,-2,3) \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de:

    a) $(1,2,0)$ y $(0,0,1)$.

    b) $(-1,1,1)$, $(0,0,1)$ y $(0,1,1)$.

    c) $(-1,1,1)$, $(0,0,1)$ y $(2,-2,1)$.

    d) $(0,1,1)$ y $(1,0,0)$.

23. Encontrar una combinación lineal que exprese $\vec{w}$ en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, en los casos siguientes:

    a) $\vec{u} = (1,2,-3)$, $\vec{v} = (-1,-3,2)$ y $\vec{w} = (1,1,-4)$.

    b) $\vec{u} = 2x - 1$, $\vec{v} = -\frac{1}{2}x + 1$ y $\vec{w} = x$.

24. Demostrar que $\begin{pmatrix} 18 & \frac{13}{6} \\ 8 & -18 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{6} \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

25. Expresar $p(x)$ como combinación lineal de $q(x) = 2x^2 + 3x + 4$ y $r(x) = x^2 - 2x - 3$ en los siguientes casos:

a) $p(x) = 4x^2 + 13x + 18$.

b) $p(x) = 5x^2 + 4x + 5$.

c) $p(x) = 4x^2 - 6x - 1$.

26. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1), \vec{v} = (2, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2)$ de $\mathbb{R}^2$, comprobar que forman un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$.

27. Hallar un sistema de generadores para los siguientes subespacios vectoriales:

    a) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + y = 0\}$.

    b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - z = 0\}$.

    c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y + 2z = 0\}$.

    d) $W_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 0,\ x - z = 0\}$.

    e) $W_5 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + w = 0\}$.

    f) $W_6 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y = 0,\ z + w = 0\}$.

    g) $W_7 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = 0,\ y + z + w = 0,\ z - 2w = 0\}$.

28. Determinar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que el vector $(1, 0, \alpha, \beta)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $(1, 4, -5, 2)$ y $(1, 2, 3, -1)$.

29. Sea $\mathcal{L}(S)$ la variedad lineal generada por los vectores de un conjunto S. Determinar las expresión analítica (coordenadas cartesianas) y paramétrica de las siguientes variedades lineales:

    a) $\mathcal{L}\{(1, 1), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

    b) $\mathcal{L}\{(1, 1), (0, 1), (2, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

    c) $\mathcal{L}\{(1, -1), (-2, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$.

    d) $\mathcal{L}\{(1, 1, 2), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    e) $\mathcal{L}\{(1, -1, 2), (0, 0, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    f) $\mathcal{L}\{(1, 2, -1), (0, 1, 0), (-1, 4, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    g) $\mathcal{L}\{(1, 2, -1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

30. Demostrar que:
$$\mathcal{L}\{(0, 1, 1), (0, 2, -1)\} = \mathcal{L}\{(0, 1, 2), (0, 2, 3), (0, 3, 1)\}.$$
    Encontrar las ecuaciones cartesianas y paramétricas de este subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

31. Estudiar la dependencia lineal de los siguientes conjuntos:

    a) $S_1 = \{(1, -2, 1),\ (2, 1, -1),\ (7, -4, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    b) $S_2 = \{(1, -3, 7),\ (2, 0, -6),\ (3, -1, -1),\ (2, 4, -5)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    c) $S_3 = \{(1, 2, -3),\ (1, -3, 2),\ (2, -1, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    d) $S_4 = \{(2, 1),\ (-4, -1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

    e) $S_5 = \{(1, 1),\ (2, -1),\ (0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

    f) $S_6 = \{(1, 2, 1),\ (1, 0, -1),\ (0, 2, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    g) $S_7 = \{(3, 0, 1),\ (2, 1, 0),\ (0, 1, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    h) $S_8 = \{(4, -5, 2, 6),\ (2, -2, 1, 3),\ (6, -3, 3, 9),\ (4, -1, 5, 6)\} \subset \mathbb{R}^4$.

32. Supongamos que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente, ¿siguen siendo linealmente independientes los siguientes conjuntos?

    a) $\{v_1 + v_2, v_3\}$.

    b) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$.

    c) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 - v_3\}$.

33. Sabiendo que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, y $\vec{w}$ son linealmente independientes, probar que los vectores $\vec{u}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ también lo son.

34. Probar que el conjunto $\mathcal{B} = \{(2,3),\ (0,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y hallar las coordenadas del vector $(5,-1)$ respecto de esta base.

35. Comprobar que $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas del vector $\vec{v}$ en esa base.

    a) $\vec{u}_1 = (1,1,1)$, $\vec{u}_2 = (1,1,2)$, $\vec{u}_3 = (1,2,3)$ y $\vec{v} = (6,9,14)$.

    b) $\vec{u}_1 = (2,1,-3)$, $\vec{u}_2 = (3,2,-5)$, $\vec{u}_3 = (1,-1,1)$ y $\vec{v} = (6,2,-7)$.

36. Estudiar si los siguientes vectores son bases de su respectivo espacio vectorial $\mathbb{R}^n$:

    a) $\{(1,0),(2,0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

    b) $\{(3,1),(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

    c) $\{(1,0),(1,1),(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

    d) $\{(1,0),(1,1),(3,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

    e) $\{(4,2,1),(2,-2,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    f) $\{(1,0,0),(0,1,-1),(0,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    g) $\{(3,0,1),(2,0,1),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    h) $\{(1,0,1),(0,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    i) $\{(1,0,1,0),(0,0,1,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

    j) $\{(0,0,1,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0),(1,0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

37. Demostrar que los vectores $\vec{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (0,0,1,1)$, $\vec{u}_3 = (1,0,0,4)$ y $\vec{u}_4 = (0,0,0,2)$ forman una base de $\mathbb{R}^4$. Hallar las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto a esta base.

38. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ hallar una base que contenga:

    a) al vector $(1,2,1,1)$.

    b) a los vectores $(1,1,0,2)$ y $(1,-1,2,0)$.

39. Demostrar que el conjunto de polinomios $\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ forman una base del espacio vectorial formado por los polinomios de grado menor o igual a 3, es decir, $\mathbb{R}_3[x]$. Probar que $\mathcal{B}' = \left\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\right\}$ también es una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

40. Demostrar que $\mathcal{B} = \left\{1, 1-x, x+x^2, x^2+x^3\right\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$. Dar las coordenadas del polinomio $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ en la base $\mathcal{B}$.

41. Calcular una base y la dimensión de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$.

42. Hallar una base y la dimensión del subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ definido por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a-3b & 4b \\ -4b & a+3b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

43. Determinar la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,2,0,3)$, $(3,1,-1,-1)$, $(-1,3,1,7)$ y $(4,3,-1,2)$.

44. Sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ definido como

$$W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-2t = 0,\ x-y-z = 0\right\}.$$

    Calcular la dimensión, una base y la expresión analítica de W.

45. Sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$W = \{(0,a,b,a+2b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

    Determinar la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas de W .

46. Dados los subespacios vectoriales

$$W_1 = \mathcal{L}\{(1,0,2),(2,0,4)\} \qquad \text{y} \qquad W_2 = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, 2x+y+z=0,\ x-y+2z=0\}.$$

Hallar la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas y cartesianas de los subespacios W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

47. Calcular una base y la dimensión de la variedad lineal $\mathcal{L}\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$, para los siguientes casos:

   a) $\vec{u} = (1,0,2)$, $\vec{v} = (0,1,0)$ y $\vec{w} = (2,2,4)$.
   b) $\vec{u} = (0,1,2)$, $\vec{v} = (1,1,0)$ y $\vec{w} = (1,0,1)$.
   c) $\vec{u} = (1,2,0,0)$, $\vec{v} = (1,2,3,4)$ y $\vec{w} = (3,6,0,0)$.

48. Hallar una base de vectores para los siguientes subespacios vectoriales y calcular su dimensión:

   a) $W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x+y=0\}$.
   b) $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-z=0\}$.
   c) $W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y+2z=0\}$.
   d) $W_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y=0,\ x-z=0\}$.
   e) $W_5 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+w=0\}$.
   f) $W_6 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y=0,\ z+w=0\}$.
   g) $W_7 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x=0,\ y+z+w=0,\ z-2w=0\}$.

49. Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}$ y sea $\vec{v} = (1,1,-2)$.

   a) Comprobar que $\mathcal{B}_W = \{(1,-1,0),\ (1,-2,1)\}$ es una base de W.
   b) Dar otra base de W distinta de $\mathcal{B}_W$.
   c) Hallar las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de la base $\mathcal{B}_W$.
   d) Hallar las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de la base del apartado *b*).
   e) Hallar las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   f) Hallar las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = \{(1,-1,0),\ (1,-2,1),\ (0,0,1)\}$.

50. Sea W el subconjunto de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ definido por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a = c + d \right\}$$

Demostrar que W es subespacio vectorial y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de W.

51. Calcular una base y la dimensión del subespacio vectorial W de V en los siguientes casos:

   a) $W = \{(a,b,0) \,|\, a,b \in \mathbb{R}\}$ y $V = \mathbb{R}^3$.
   b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}$ y $V = \mathbb{R}^3$.
   c) $W = \{a\,x^2 + c \,|\, a,c \in \mathbb{R}\}$ y $V = \mathbb{R}_2[x]$.
   d) $W = \{M \in \mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \,|\, \det(M) = 0\}$ y $V = \mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$.

52. Sean $W_1 = \mathcal{L}\{(1,0,1,0),(0,0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$ y $W_2 = \mathcal{L}\{(1,0,2,0),(0,0,0,1)\} \subset R^4$.

   a) Calcular las expresiones analíticas (ecuaciones cartesianas) y bases de W_1 y W_2.
   b) Calcular una base de $W_1 \cap W_2$.
   c) Calcular $\dim(W_1 + W_2)$.
   d) Calcular una base de $W_1 + W_2$.

53. Dados los subespacios de R^3:

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + z = 0\} \quad \text{y} \quad W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + y - 2z = 0\}$$

Determinar la dimensión y base de los subespacios vectoriales: W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

54. Sean:

$$W_1 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z + 3t = 0 \\ 2x + 3z + t = 0 \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad W_2 = \mathcal{L}\left\{(1,1,1,1), (-2,1,0,1)\right\}$$

subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

a) Hallar la dimensión y una base de W_1, W_2 y $W_1 \cap W_2$.

b) Hallar $W_1 + W_2$. ¿Es suma directa?

55. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios W_1 y W_2 generados, respectivamente, por los sistemas de vectores:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1,0,1,0\}, (0,1,0,1), (1,1,1,1)\} \\ S_2 &= \{(1,0,0,0), (2,1,0,1), (5,1,0,1)\} \end{aligned}$$

Hallar:

a) Base y dimensión de W_1 y W_2.

b) Ecuaciones y base de $W_1 + W_2$.

c) Ecuaciones y base de $W_1 \cap W_2$.