SEMINARIO DE ANÁLISIS COMPLEJO Y TEMAS RELACIONADOS

"Derivada Schwarziana de aplicaciones armónicas"

María José Martín
(Universidad Autónoma de Madrid)

Viernes, 15 de marzo de 2013, de 10:30 a 11:30. Aula 520, Módulo 17, Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid.

Resumen:

En un dominio símplemente conexo Ω del plano complejo, una aplicación armónica f puede escribirse como $f = h + \bar{g}$, donde h y g son funciones analíticas en Ω. Por su analogía con la famosa clase ***S*** de funciones analíticas univalentes, tiene especial interés la familia S_H^0 de funciones $f = h + \bar{g}$ armónicas e inyectivas en el disco unidad **D** con las normalizaciones $h(0) = g(0) = g'(0) = 1 - h'(0) = 0$. Existe un gran número de problemas no resueltos en S_H^0. Uno de los más importantes es el llamado "problema del a_2":

Si $f = h + \bar{g} \in S_H^0$, es cierto que el segundo coeficiente de Taylor $a_2(h)$ de h cumple $|a_2(h)| < 5/2$?

Una respuesta afirmativa implicaría resultados precisos en teoremas de distorsión y recubrimiento para la clase.

Utilizando las propiedades geométricas de la superficie mínima asociada a una aplicación armónica en el disco unidad con segunda dilatación compleja $\omega = q^2$ -para cierta aplicación analítica q en **D**-, Chuaqui, Duren y Osgood propusieron una definición de derivada Schwarziana S_1 para este tipo de funciones armónicas. No obstante, esa condición sobre la dilatación hace que la definición no sea, en cierta forma, la más natural. Recientemente, hemos presentado una nueva propuesta de derivada Schwarziana S_2 definida, esta vez, para *todas* las aplicaciones armónicas localmente univalentes en **D**.

En esta charla, mostraremos que los resultados obtenidos por Chuaqui, Duren y Osgood también son ciertos para la ``nueva'' derivada Schwarziana S_2. También, que S_2 que posee una importante propiedad que no es satisfecha por S_1: Su invarianza por pre-composiciones con funciones armónicas afines. Utilizando esta propiedad, generalizamos los resultados clásicos de Ahlfors y Becker sobre las extensiones quasiconformes de funciones analíticas. Finalmente, demostraremos que para toda función $f = h + \bar{g} \in S_H^0$,

$$|a_2(h)| \le \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sup_{f \in S_H^0} \|S_2(f)\|}{2}}, \qquad \text{donde} \qquad \|S_2(f)\| = \sup_{|z|<1} |S_2(f)| \cdot (1 - |z|^2)^2.$$

Este es un trabajo conjunto con los profesores M. Chuaqui y R. Hernández.