SEMINARIO DE ANÁLISIS COMPLEJO:

Dos conjeturas sobre los coefficientes de las funciones univalentes

Presentación previa a la defensa de tesis doctoral

Iason Efraimidis, UAM

Miércoles, 31 de mayo de 2017 a las 11:30

(Aula 520, Módulo 17, Departamento de Matemáticas, UAM)

Resumen:

Sea S la clase de funciones holomorfas y univalentes (injectivas) dadas por $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, en $|z| < 1$. Para el desarrollo de la teoría sobre esta clase, ha sido significativa la conjetura de Bieberbach (1916), según la cual los coeficientes de las funciones en S deben satisfacer $|a_n| \leq n$ y la única función extremal (salvo rotaciones) debe ser la función de Koebe, dada por

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n .$$

La conjetura fue probada por de Branges en 1984. En este seminario de prelectura de tesis, presentaremos dos conjeturas relevantes.

En el comienzo de los años 70 Zalcman conjeturó que

$$|a_n^2 - a_{2n-1}| \leq (n-1)^2, \qquad n \geq 2.$$

y observó que la veracidad de esta conjetura implica la desigualdad de Bieberbach. Veremos que esta implicación pasa por tres conjeturas relacionadas pero más débiles que la de Zalcman. Además, veremos que la conjetura de Zalcman es asintóticamente cierta y obtendremos estimaciones precisas en ciertas subclases de la clase S.

La conjetura de Bombieri (1967) está relacionada con el comportamiento de los coeficientes de las funciones de la clase S en un entorno de la función de Koebe. Según esta conjetura

$$\liminf_{f \to K} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m} = \min_{t \in \mathbb{R}} \frac{n \sin t - \sin(nt)}{m \sin t - \sin(mt)}, \qquad m, n \geq 2, \ f \in S.$$

Se conoce que, para ciertos puntos (m, n), esta conjetura es falsa. Demostraremos que la conjetura es falsa en algunos puntos más utilizando el método variacional de Bombieri, técnicas de polinómios univalentes y trigonometría.