SEMINARIO DE ANÁLISIS COMPLEJO:
La conjetura de Bombieri sobre las funciones univalentes

IASON EFRAIMIDIS, UAM

Miércoles, 21 de diciembre de 2016 a las 12:00
(Aula 520, Módulo 17, Departamento de Matemáticas, UAM)

Resumen:

Denotamos por S la clase de funciones analíticas y univalentes (injectivas) dadas por

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad |z| < 1.$$

La motivación central para el desarollo de la teoría de funciones en la clase S ha sido la conjetura de Bieberbach (1916), la cual afirma que $|a_n| \leq n$ y que la única función extremal debe ser la función de Koebe dada por

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$$

Antes de que dicha conjetura fuera resuelta por de Branges (1984), el esfuerzo de varios matemáticos (Garabedian, Schiffer, etc.) hacia una solución local, es decir, en un entorno de la función de Koebe, terminó con exito en un trabajo de Bombieri (1967). En el mismo artículo Bombieri conjeturó que

$$\liminf_{f \to K} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m} = \min_{t \in \mathbb{R}} \frac{n \sin t - \sin(nt)}{m \sin t - \sin(mt)}, \qquad m, n \geq 2, \ f \in S.$$

Greiner y Roth (2001) probaron que la conjetura es falsa en $(m, n) = (3, 2)$ y unos años después fue probado que la conjetura es falsa para tres puntos (m, n) más. Recientemente, Leung demostró que en los puntos $(m, 2)$ para cada $m \geq 3$, y también en $(m, 3)$ para cada $m \geq 5$ impar, la conjetura es falsa. Siguiendo su trabajo veremos que la conjetura de Bombieri es falsa en muchos más casos, para puntos (m, n) en algunos sectores. La demostración se basa en trigonometría y también involucra el criterio de Dieudonné sobre la univalencia de polinomios.