Teoremas *"Two-point distortion"* para funciones armónicas complejas

Rodrigo Hernández

Universidad Adolfo Ibáñez, Viña del Mar, Chile

Trabajo junto con V. Bravo y O. Venegas

February 22, 2023

Consideremos f una función analítica univalente (inyectiva) en el disco unidad $\mathbb{D}$.

Por ejemplo f una función de Möbius,

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0.$$

Satisface que

$$|f(a) - f(b)| = |a - b|\sqrt{|f'(a)||f'(b)|}.$$

Es decir, sabemos exactamente qué tan grande es la distancia entre dos puntos de la imagen en términos de la distancia euclideana y la derivada en dichos puntos.

Consideremos f una función analítica univalente (inyectiva) en el disco unidad $\mathbb{D}$.
Por ejemplo f una función de Möbius,

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0.$$

Satisface que

$$|f(a) - f(b)| = |a - b|\sqrt{|f'(a)|f'(b)|}.$$

Es decir, sabemos exactamente qué tan grande es la distancia entre dos puntos de la imagen en términos de la distancia euclideana y la derivada en dichos puntos.

Consideremos f una función analítica univalente (inyectiva) en el disco unidad $\mathbb{D}$.
Por ejemplo f una función de Möbius,

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0.$$

Satisface que

$$|f(a) - f(b)| = |a - b| \sqrt{|f'(a)| f'(b)|}.$$

Es decir, sabemos exactamente qué tan grande es la distancia entre dos puntos de la imagen en términos de la distancia euclideana y la derivada en dichos puntos.

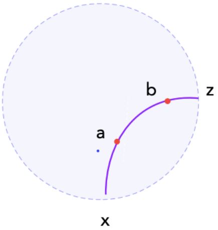
¿Qué es un teorema *two-point distortion*?

Estimar $|f(a) - f(b)|$ para a y b en $\mathbb{D}$, pero en términos de la distancia euclideana o hiperbólica de a y b, y la derivada de f en dichos puntos.

¿Qué es un teorema *two-point distortion*?

Estimar $|f(a) - f(b)|$ para a y b en $\mathbb{D}$, pero en términos de la distancia euclideana o hiperbólica de a y b, y la derivada de f en dichos puntos.

La distancia hiperbólica entre a y b en $\mathbb{D}$ está dada por:

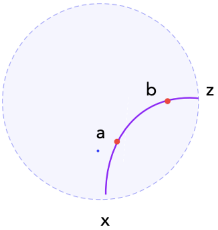


$$d(a,b) = \tanh^{-1}(\rho(a,b)) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\rho(a,b)}{1-\rho(a,b)}\right),$$

donde

$$\rho(a,b) = \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|.$$

La distancia hiperbólica entre a y b en $\mathbb{D}$ está dada por:

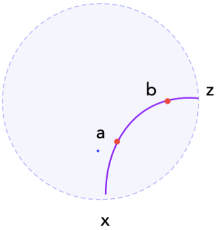


$$d(a,b) = \tanh^{-1}(\rho(a,b)) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\rho(a,b)}{1-\rho(a,b)}\right),$$

donde

$$\rho(a,b) = \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|.$$

La distancia hiperbólica entre a y b en $\mathbb{D}$ está dada por:



$$d(a,b) = \tanh^{-1}(\rho(a,b)) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\rho(a,b)}{1-\rho(a,b)}\right),$$

donde

$$\rho(a,b) = \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|.$$

C. Blatter (Comment. Math. Helv. 1978) prueba que, si f es univalente, entonces

$$|f(a) - f(b)|^2 \geq \frac{\sinh^2(2d(a,b))}{8(\cosh(4d(a,b)))} \left(R(a)^2 + R(b)^2\right) .$$

$$R(z) = (1 - |z|^2)|f'(z)|.$$

C. Blatter (Comment. Math. Helv. 1978) prueba que, si f es univalente, entonces

$$|f(a) - f(b)|^2 \geq \frac{\sinh^2(2d(a,b))}{8(\cosh(4d(a,b)))} \left(R(a)^2 + R(b)^2\right).$$

$$R(z) = (1 - |z|^2)|f'(z)|.$$

Si consideramos una subclase de las funciones univalentes, tales como las funciones convexas, esto es, funciones que mapean conformemente $\mathbb{D}$ en un dominio convexo del plano complejo.

Kim & Minda (PJM 1994) prueban para $f(\mathbb{D})$ convexo que

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{\tanh(d(a,b))}{2} \left(R(a) + R(b)\right).$$

Si consideramos una subclase de las funciones univalentes, tales como las funciones convexas, esto es, funciones que mapean conformemente $\mathbb{D}$ en un dominio convexo del plano complejo.

Kim & Minda (PJM 1994) prueban para $f(\mathbb{D})$ convexo que

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{\tanh(d(a,b))}{2}\left(R(a) + R(b)\right).$$

Sea f localmente univalente ($f' \neq 0$), se define la derivada Schwarziana como:

$$Sf = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Sabemos que

$$Sf \equiv 0 \Leftrightarrow f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Nehari (BAMS1949) demuestra que

$$||Sf|| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |Sf(z)|(1 - |z|^2)^2 \leq 2$$

entonces f es univalente.

Sea f localmente univalente ($f' \neq 0$), se define la derivada Schwarziana como:

$$Sf = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Sabemos que

$$Sf \equiv 0 \Leftrightarrow f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Nehari (BAMS1949) demuestra que

$$\|Sf\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |Sf(z)|(1 - |z|^2)^2 \leq 2$$

entonces f es univalente.

Sea f localmente univalente ($f' \neq 0$), se define la derivada Schwarziana como:

$$Sf = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Sabemos que

$$Sf \equiv 0 \Leftrightarrow f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Nehari (BAMS1949) demuestra que

$$\|Sf\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |Sf(z)|(1 - |z|^2)^2 \leq 2$$

entonces f es univalente.

Sea f localmente univalente ($f' \neq 0$), se define la derivada Schwarziana como:

$$Sf = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 .$$

Sabemos que

$$Sf \equiv 0 \Leftrightarrow f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Nehari (BAMS1949) demuestra que

$$\|Sf\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |Sf(z)|(1 - |z|^2)^2 \leq 2$$

entonces f es univalente.

Chuaqui & Pommerenke (PJM 1999) muestran que

$$\|Sf\| \leq 2 \Leftrightarrow |f(a) - f(b)| \geq d(a,b)\sqrt{R(a)R(b)}.$$

Ma, Mejía, & Minda (CAOT 2014) prueban que

$$\|Sf\| \leq 2t \Rightarrow |f(a) - f(b)| \geq \frac{\sinh\left(d(a,b)\sqrt{1-t}\right)}{\sqrt{1-t}}\sqrt{R(a)R(b)}.$$

Chuaqui & Pommerenke (PJM 1999) muestran que

$$\|Sf\| \leq 2 \Leftrightarrow |f(a) - f(b)| \geq d(a,b)\sqrt{R(a)R(b)}.$$

Ma, Mejía, & Minda (CAOT 2014) prueban que

$$\|Sf\| \leq 2t \Rightarrow |f(a) - f(b)| \geq \frac{\sinh\left(d(a,b)\sqrt{1-t}\right)}{\sqrt{1-t}}\sqrt{R(a)R(b)}.$$

Chuaqui & Pommerenke (PJM 1999) muestran que

$$\|Sf\| \leq 2 \Leftrightarrow |f(a) - f(b)| \geq d(a,b)\sqrt{R(a)R(b)}.$$

Ma, Mejía, & Minda (CAOT 2014) prueban que

$$\|Sf\| \leq 2t \Rightarrow |f(a) - f(b)| \geq \frac{\sinh\left(d(a,b)\sqrt{1-t}\right)}{\sqrt{1-t}}\sqrt{R(a)R(b)}.$$

Chuaqui & Pommerenke (PJM 1999) muestran que

$$\|Sf\| \leq 2 \Leftrightarrow |f(a) - f(b)| \geq d(a,b)\sqrt{R(a)R(b)}.$$

Ma, Mejía, & Minda (CAOT 2014) prueban que

$$\|Sf\| \leq 2t \Rightarrow |f(a) - f(b)| \geq \frac{\sinh\left(d(a,b)\sqrt{1-t}\right)}{\sqrt{1-t}}\sqrt{R(a)R(b)}.$$

¿Cuál es la situación para la derivada Pre-Schwarziana?

Sea f localmente univalente, se define Pf como:

$$Pf = \frac{f''}{f'}.$$

J. Becker (Crelle's 1972) demuestra que

$$\|Pf\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |Pf(z)|(1-|z|^2) \leq 1 \Rightarrow f \text{ univalente.}$$

Two-point distortion?????

¿Cuál es la situación para la derivada Pre-Schwarziana?

Sea f localmente univalente, se define Pf como:

$$Pf = \frac{f''}{f'}.$$

J. Becker (Crelle's 1972) demuestra que

$$\|Pf\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |Pf(z)|(1-|z|^2) \leq 1 \Rightarrow f \text{ univalente.}$$

Two-point distortion?????

¿Cuál es la situación para la derivada Pre-Schwarziana?

Sea f localmente univalente, se define Pf como:

$$Pf = \frac{f''}{f'}.$$

J. Becker (Crelle's 1972) demuestra que

$$\|Pf\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |Pf(z)|(1-|z|^2) \leq 1 \Rightarrow f \text{ univalente.}$$

Two-point distortion?????

¿Cuál es la situación para la derivada Pre-Schwarziana?

Sea f localmente univalente, se define Pf como:

$$Pf = \frac{f''}{f'}.$$

J. Becker (Crelle's 1972) demuestra que

$$\|Pf\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |Pf(z)|(1-|z|^2) \leq 1 \Rightarrow f \text{ univalente.}$$

Two-point distortion?????

Sea f localmente univalente deinida en $\mathbb{D}$, normalizada con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Se define su orden como:

$$ord\langle f\rangle = \alpha = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{1}{2}\left|(1-|z|^2)\frac{f''}{f'}(z) - 2\overline{z}\right|.$$

También se puede escribir de la siguiente manera:

$$ord\langle f\rangle = \alpha = \sup_{a\in\mathbb{D}} |a_2(f_a)|,$$

donde

$$f_a(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|^2)f'(a)}.$$

Sea f localmente univalente deinida en $\mathbb{D}$, normalizada con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Se define su orden como:

$$ord\langle f\rangle = \alpha = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{1}{2}\left|(1-|z|^2)\frac{f''}{f'}(z) - 2\overline{z}\right|.$$

También se puede escribir de la siguiente manera:

$$ord\langle f\rangle = \alpha = \sup_{a\in\mathbb{D}} |a_2(f_a)|,$$

donde

$$f_a(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|^2)f'(a)}.$$

Así, aplicando la conocida fórmula del crecimiento de estas funciones, esto es,

$$\frac{1}{2\alpha}\left(\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\alpha}-1\right) \geq |f(z)| \geq \frac{1}{2\alpha}\left(1-\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{\alpha}\right),$$

lo cual es equivalente, en términos de la métrica hiperbólica, a

$$\frac{1}{2\alpha}(\exp(2\alpha d(z,0))-1) \geq |f(z)| \geq \frac{1}{2\alpha}(1-\exp(-2\alpha d(z,0))),$$

a la función f_a tenemos que

$$|f(a)-f(b)| \geq \frac{1}{2\alpha}(1-\exp(-2\alpha d(a,b)))\max\{R(a),R(b)\}.$$

Así, aplicando la conocida fórmula del crecimiento de estas funciones, esto es,

$$\frac{1}{2\alpha}\left(\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\alpha}-1\right) \geq |f(z)| \geq \frac{1}{2\alpha}\left(1-\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{\alpha}\right),$$

lo cual es equivalente, en términos de la métrica hiperbólica, a

$$\frac{1}{2\alpha}(\exp(2\alpha d(z,0))-1) \geq |f(z)| \geq \frac{1}{2\alpha}(1-\exp(-2\alpha d(z,0))),$$

a la función f_a tenemos que

$$|f(a)-f(b)| \geq \frac{1}{2\alpha}(1-\exp(-2\alpha d(a,b)))\max\{R(a),R(b)\}.$$

Así, aplicando la conocida fórmula del crecimiento de estas funciones, esto es,

$$\frac{1}{2\alpha}\left(\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\alpha}-1\right) \geq |f(z)| \geq \frac{1}{2\alpha}\left(1-\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{\alpha}\right),$$

lo cual es equivalente, en términos de la métrica hiperbólica, a

$$\frac{1}{2\alpha}(\exp(2\alpha d(z,0))-1) \geq |f(z)| \geq \frac{1}{2\alpha}(1-\exp(-2\alpha d(z,0))),$$

a la función f_a tenemos que

$$|f(a)-f(b)| \geq \frac{1}{2\alpha}(1-\exp(-2\alpha d(a,b)))\max\{R(a),R(b)\}.$$

No es difícil probar que si f satisface el criterio de Becker, entonces su orden es menor o igual a $3/2$.

De esta manera obtenemos que

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{1 - \exp(-3d(a,b))}{3} \max\{R(a), R(b)\},$$

donde $R(z) = (1 - |z|^2)|f'(z)|$.

¿Qué pasa si f es una función armónica compleja?

No es difícil probar que si f satisface el criterio de Becker, entonces su orden es menor o igual a $3/2$.

De esta manera obtenemos que

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{1 - \exp(-3d(a,b))}{3} \max\{R(a), R(b)\},$$

donde $R(z) = (1 - |z|^2)|f'(z)|$.

¿Qué pasa si f es una función armónica compleja?

No es difícil probar que si f satisface el criterio de Becker, entonces su orden es menor o igual a $3/2$.

De esta manera obtenemos que

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{1 - \exp(-3d(a,b))}{3} \max\{R(a), R(b)\},$$

donde $R(z) = (1 - |z|^2)|f'(z)|$.

¿Qué pasa si f es una función armónica compleja?

Sea $f = u + iv$ tales que $\Delta u = \Delta v = 0$, es decir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$.

Salvo por constante aditiva, existen únicas h y g analíticas tales que

$$f = h + \overline{g}$$

Podemos ver que el jacobiano de f está dado por $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$.

Lewy (BAMS 1936) prueba que f es localmente univalente si y sólo si $J_f \neq 0$.

Consideraremos f que preserva la orientación, esto es $J_f > 0$. Esto implica que $h' \neq 0$ y la segunda dilatación compleja $\omega = g'/h' : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

Sea $f = u + iv$ tales que $\Delta u = \Delta v = 0$, es decir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$.

Salvo por constante aditiva, existen únicas h y g analíticas tales que

$$f = h + \overline{g}$$

Podemos ver que el jacobiano de f está dado por $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$.

Lewy (BAMS 1936) prueba que f es localmente univalente si y sólo si $J_f \neq 0$.

Consideraremos f que preserva la orientación, esto es $J_f > 0$. Esto implica que $h' \neq 0$ y la segunda dilatación compleja $\omega = g'/h' : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

Sea $f = u + iv$ tales que $\Delta u = \Delta v = 0$, es decir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$.

Salvo por constante aditiva, existen únicas h y g analíticas tales que

$$f = h + \overline{g}$$

Podemos ver que el jacobiano de f está dado por $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$.

Lewy (BAMS 1936) prueba que f es localmente univalente si y sólo si $J_f \neq 0$.

Consideraremos f que preserva la orientación, esto es $J_f > 0$. Esto implica que $h' \neq 0$ y la segunda dilatación compleja $\omega = g'/h' : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

Sea $f = u + iv$ tales que $\Delta u = \Delta v = 0$, es decir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$.

Salvo por constante aditiva, existen únicas h y g analíticas tales que

$$f = h + \overline{g}$$

Podemos ver que el jacobiano de f está dado por $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$.

Lewy (BAMS 1936) prueba que f es localmente univalente si y sólo si $J_f \neq 0$.

Consideraremos f que preserva la orientación, esto es $J_f > 0$. Esto implica que $h' \neq 0$ y la segunda dilatación compleja $\omega = g'/h' : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

Sea $f = u + iv$ tales que $\Delta u = \Delta v = 0$, es decir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$.

Salvo por constante aditiva, existen únicas h y g analíticas tales que

$$f = h + \overline{g}$$

Podemos ver que el jacobiano de f está dado por $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$.

Lewy (BAMS 1936) prueba que f es localmente univalente si y sólo si $J_f \neq 0$.

Consideraremos f que preserva la orientación, esto es $J_f > 0$. Esto implica que $h' \neq 0$ y la segunda dilatación compleja $\omega = g'/h' : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

Duren, Hamada & Kohr (TAMS 2011) prueban que si $f = h + \overline{g}$ es univalente, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{1}{16}(1 - \exp(-4d(a,b))) \max\{R(a), R(b)\}.$$

Ahora

$$R(z) = (1 - |z|^2)(|h'(z)| - |g'(z)|).$$

Duren, Hamada & Kohr (TAMS 2011) prueban que si $f = h + \overline{g}$ es univalente, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{1}{16}(1 - \exp(-4d(a,b))) \max\{R(a), R(b)\}.$$

Ahora

$$R(z) = (1 - |z|^2)(|h'(z)| - |g'(z)|).$$

Duren, Hamada & Kohr (TAMS 2011) prueban que si $f = h + \overline{g}$ es univalente, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{1}{16}(1 - \exp(-4d(a,b))) \max\{R(a), R(b)\}.$$

Ahora

$$R(z) = (1 - |z|^2)(|h'(z)| - |g'(z)|).$$

Sea $f = h + \overline{g}$ una función que preserva la orientación. M.J. Martín & RH (JGA 2015) definen las derivadas Pre-Schwarziana y Schwarziana como:

$$P_f = \frac{h''}{h'} - \frac{\bar{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2} = \frac{\partial}{\partial z}\log(J_f).$$

$$S_f = \frac{\partial}{\partial z}P_f - \frac{1}{2}(P_f)^2 = Sh + \frac{\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\left(\omega'\frac{h''}{h'} - \omega''\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\omega'\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\right)^2.$$

Sea $f = h + \overline{g}$ una función que preserva la orientación. M.J. Martín & RH (JGA 2015) definen las derivadas Pre-Schwarziana y Schwarziana como:

$$P_f = \frac{h''}{h'} - \frac{\bar{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2} = \frac{\partial}{\partial z}\log(J_f).$$

$$S_f = \frac{\partial}{\partial z}P_f - \frac{1}{2}(P_f)^2 = Sh + \frac{\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\left(\omega'\frac{h''}{h'} - \omega''\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\omega'\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\right)^2.$$

En este mismo trabajo se prueba el criterio de Becker para esta Pf, esto es:

$$(1-|z|^2)|zP_f(z)| + \frac{|z\omega'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\omega(z)|^2} \leq 1,$$

entonces f es univalente. La constante 1 es óptima.

En este mismo trabajo se prueba el criterio de Becker para esta Pf, esto es:

$$(1-|z|^2)|zP_f(z)| + \frac{|z\omega'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\omega(z)|^2} \leq 1,$$

entonces f es univalente. La constante 1 es óptima.

Teorema (Bravo, Venegas, & RH 2022)

Si f satisface el criterio de Becker, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{1}{3}(1 - \exp(-3d(a,b))) \max\{R(a), R(b)\}.$$

Proof.

Para cada λ en el disco, se tiene que $\varphi_\lambda = h + \lambda g$ satisface el criterio de Becker.

Entonces se puede probar que el orden de φ_λ es $\frac{3}{2}$.

Por último, $f(a) - f(b) = h(a) - h(b) + \overline{(g(a) - g(b))} = h(a) - h(b) + \lambda(g(a) - g(b)) = \varphi_\lambda(a) - \varphi_\lambda(b)$. $\square$

Teorema (Bravo, Venegas, & RH 2022)

Si f satisface el criterio de Becker, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{1}{3}(1 - \exp(-3d(a,b))) \max\{R(a), R(b)\}.$$

Proof.

Para cada λ en el disco, se tiene que $\varphi_\lambda = h + \lambda g$ satisface el criterio de Becker.

Entonces se puede probar que el orden de φ_λ es $\frac{3}{2}$.

Por último, $f(a) - f(b) = h(a) - h(b) + \overline{(g(a) - g(b))} = h(a) - h(b) + \lambda(g(a) - g(b)) = \varphi_\lambda(a) - \varphi_\lambda(b)$. □

Teorema (Bravo, Venegas, & RH 2022)

Si f satisface el criterio de Becker, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{1}{3}(1 - \exp(-3d(a,b))) \max\{R(a), R(b)\}.$$

Proof.

Para cada λ en el disco, se tiene que $\varphi_\lambda = h + \lambda g$ satisface el criterio de Becker.

Entonces se puede probar que el orden de φ_λ es $\dfrac{3}{2}$.

Por último, $f(a) - f(b) = h(a) - h(b) + \overline{(g(a) - g(b))} = h(a) - h(b) + \lambda(g(a) - g(b)) = \varphi_\lambda(a) - \varphi_\lambda(b)$. □

Teorema (Bravo, Venegas, & RH 2022)

Si f satisface el criterio de Becker, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{1}{3}(1 - \exp(-3d(a,b))) \max\{R(a), R(b)\}.$$

Proof.

Para cada λ en el disco, se tiene que $\varphi_\lambda = h + \lambda g$ satisface el criterio de Becker.

Entonces se puede probar que el orden de φ_λ es $\dfrac{3}{2}$.

Por último, $f(a) - f(b) = h(a) - h(b) + \overline{(g(a) - g(b))} = h(a) - h(b) + \lambda(g(a) - g(b)) = \varphi_\lambda(a) - \varphi_\lambda(b)$. □

Teorema (Bravo, Venegas, & RH 2022)

Si f satisface el criterio de Nehari, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq d(a,b)\sqrt{R(a)R(b)}.$$

Proof.

Si f satisface $\|Sf\| \leq \varepsilon_0$, entonces $\|S\varphi_\lambda\| \leq 2$.

Al igual que antes, se usa el teorema conocido de two-point distortion para funciones en la clase de Nehari. □

Teorema (Bravo, Venegas, & RH 2022)

Si f satisface el criterio de Nehari, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq d(a,b)\sqrt{R(a)R(b)}.$$

Proof.

Si f satisface $\|Sf\| \leq \varepsilon_0$, entonces $\|S\varphi_\lambda\| \leq 2$.

Al igual que antes, se usa el teorema conocido de two-point distortion para funciones en la clase de Nehari. □

Teorema (Bravo, Venegas, & RH 2022)

Si f satisface el criterio de Nehari, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq d(a,b)\sqrt{R(a)R(b)}.$$

Proof.

Si f satisface $\|Sf\| \leq \varepsilon_0$, entonces $\|S\varphi_\lambda\| \leq 2$.

Al igual que antes, se usa el teorema conocido de two-point distortion para funciones en la clase de Nehari. $\square$

Chuaqui & RH (JMAA 2007) prueban que si h mapea conformemente el disco unitario en un dominio convexo, entonces $f = h + \overline{g}$ es univalente.

Teorema (Bravo, Venegas, & RH 2022)

Si h es convexa (h es convexa), entonces $f = h + \overline{g}$ satisface que

$$|f(a) - f(b)| \geq (1 - \|\omega\|_\infty) \tanh(d(a,b)) \left(\frac{R_h(a) + R_h(b)}{2} \right).$$

Chuaqui & RH (JMAA 2007) prueban que si h mapea conformemente el disco unitario en un dominio convexo, entonces $f = h + \overline{g}$ es univalente.

Teorema (Bravo, Venegas, & RH 2022)

Si h es convexa (h es convexa), entonces $f = h + \overline{g}$ satisface que

$$|f(a) - f(b)| \geq (1 - \|\omega\|_\infty) \tanh(d(a,b)) \left(\frac{R_h(a) + R_h(b)}{2} \right).$$

Proof.

$|f(a) - f(b)| \geq |h(a) - h(b)| - |g(a) - g(b)|$.

$$|g(a) - g(b)| = \left| \int_\gamma g'(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_\Gamma \frac{g'(h^{-1}(w))}{h'(h^{-1}(w))} dw \right|,$$

donde $\gamma \in \mathbb{D}$ une a con b y $\Gamma = h(\gamma)$.

Así, tenemos que

$$|g(a) - g(b)| \leq \|\omega\|_\infty \int_\Gamma |dw| \leq \|\omega\|_\infty |h(a) - h(b)|.$$

Usando el teorema de two-point distortion para funciones convexas, se obtiene el resultado.

Proof.

$|f(a) - f(b)| \geq |h(a) - h(b)| - |g(a) - g(b)|$.

$$|g(a) - g(b)| = \left| \int_\gamma g'(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_\Gamma \frac{g'(h^{-1}(w))}{h'(h^{-1}(w))} dw \right|,$$

donde $\gamma \in \mathbb{D}$ une a con b y $\Gamma = h(\gamma)$.

Así, tenemos que

$$|g(a) - g(b)| \leq \|\omega\|_\infty \int_\Gamma |dw| \leq \|\omega\|_\infty |h(a) - h(b)|.$$

Usando el teorema de two-point distortion para funciones convexas, se obtiene el resultado.

$\square$

Proof.

$$|f(a) - f(b)| \geq |h(a) - h(b)| - |g(a) - g(b)|.$$

$$|g(a) - g(b)| = \left| \int_\gamma g'(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_\Gamma \frac{g'(h^{-1}(w))}{h'(h^{-1}(w))} dw \right|,$$

donde $\gamma \in \mathbb{D}$ une a con b y $\Gamma = h(\gamma)$.

Así, tenemos que

$$|g(a) - g(b)| \leq \|\omega\|_\infty \int_\Gamma |dw| \leq \|\omega\|_\infty |h(a) - h(b)|.$$

Usando el teorema de two-point distortion para funciones convexas, se obtiene el resultado.

Proof.

$|f(a) - f(b)| \geq |h(a) - h(b)| - |g(a) - g(b)|$.

$$|g(a) - g(b)| = \left| \int_\gamma g'(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_\Gamma \frac{g'(h^{-1}(w))}{h'(h^{-1}(w))} dw \right|,$$

donde $\gamma \in \mathbb{D}$ une a con b y $\Gamma = h(\gamma)$.

Así, tenemos que

$$|g(a) - g(b)| \leq \|\omega\|_\infty \int_\Gamma |dw| \leq \|\omega\|_\infty |h(a) - h(b)|.$$

Usando el teorema de two-point distortion para funciones convexas, se obtiene el resultado.

$\square$

Chuaqui & RH (JMAA 2007) prueban que si h es c-linealmente conexa y $|\omega| \leq 1/c$, entonces f es univalente.

Teorema (Bravo, Venegas, & RH 2022)

Si $f = h + \overline{g}$ es tal que h es una función normalizada c-linealmente conexa tal que $\|\omega\|_\infty < 1/c$, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{(1 - c\|\omega\|_\infty)}{2\alpha}(1 - \exp(-2\alpha d(a, b)))M(a, b),$$

donde $M(a, b) = \max\{R_h(a), R_h(b)\}$.

Chuaqui & RH (JMAA 2007) prueban que si h es c-linealmente conexa y $|\omega| \leq 1/c$, entonces f es univalente.

Teorema (Bravo, Venegas, & RH 2022)

Si $f = h + \overline{g}$ es tal que h es una función normalizada c-linealmente conexa tal que $\|\omega\|_\infty < 1/c$, entonces

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{(1 - c\|\omega\|_\infty)}{2\alpha}(1 - \exp(-2\alpha d(a,b)))M(a,b),$$

donde $M(a,b) = \max\{R_h(a), R_h(b)\}$.

Problema Abierto

Sea h c-linealmente conexa. Esto significa que $h(\mathbb{D})$ es un dominio c-linealmente conexo, esto es, que para todo a y b en el dominio, existe una curva γ que une estos puntos y que satisface que $\ell_\gamma \leq c|a-b|$.

¿Cuál es el orden de éstas funciones?

¿Cuál es el teorema de two-point distortion?

Problema Abierto

Sea h c-linealmente conexa. Esto significa que $h(\mathbb{D})$ es un dominio c-linealmente conexo, esto es, que para todo a y b en el dominio, existe una curva γ que une estos puntos y que satisface que $\ell_\gamma \leq c|a-b|$.

¿Cuál es el orden de éstas funciones?

¿Cuál es el teorema de two-point distortion?

Problema Abierto

Sea h c-linealmente conexa. Esto significa que $h(\mathbb{D})$ es un dominio c-linealmente conexo, esto es, que para todo a y b en el dominio, existe una curva γ que une estos puntos y que satisface que $\ell_\gamma \leq c|a - b|$.

¿Cuál es el orden de éstas funciones?

¿Cuál es el teorema de two-point distortion?