Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática)

Problemas resueltos: Primera parte. Números reales.

Última actualización: 2023

Preparado por los profesores de la asignatura: Pablo Fernández, Luis Guijarro, Dragan Vukotić (coordinadores), Kazaros Kazarian, Rafael Orive y José Luis Torrea

1. Demuestra *por inducción* que, para todo $n \geq 1$, se cumple la identidad

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\,.$$

SOLUCIÓN. El caso $n=1$ nos dice que $\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$, que es claramente cierto.

Supongamos que, para un n natural fijo, se cumple la igualdad

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\,.$$

Hemos de demostrar que se cumple la afirmación análoga, con $n+1$ en lugar de n:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}\,.$$

Veámoslo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} &\overset{\text{hip. inducción}}{=} \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n+1}{n+2}\,.
\end{aligned}$$

Según el Principio de Inducción, se sigue que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

para todo n natural.

2. Demuéstrese *por inducción* que, para todo $n\in\mathbb{N}$, el número $N(n)=n^3+5n$ es divisible por 6.

SOLUCIÓN. Obviamente, $N(1)=6$ es divisible entre 6. Supongamos ahora que, para cierto $n\in\mathbb{N}$, el número $N(n)$ es un múltiplo natural de 6. Veamos que 6 también es un divisor del número $N(n+1)$. Desarrollando el cubo y agrupando los términos de forma conveniente, obtenemos:

$$\begin{aligned}
N(n+1) &= (n+1)^3+5(n+1)=(n^3+3n^2+3n+1)+5n+5\\
&= (n^3+5n)+(3n^2+3n)+6=N(n)+3n(n+1)+6\,.
\end{aligned}$$

Obsérvese que n y $n+1$ son dos números naturales consecutivos y, por tanto, uno de ellos es par, luego el número $n(n+1)$ es par y, por tanto, $3n(n+1)$ es divisible por $2\cdot 3=6$. Se sigue que nuestro número $N(n+1)$ es la suma de tres números divisibles entre 6, a saber, $N(n)$ (por hipótesis inductiva), $3n(n+1)$ y 6, luego también es divisible por 6. Esto completa la prueba por inducción.

3. Recordemos que el número $n!$ ("ene factorial") se define como $n! = 1 \cdot 2 \cdots 3 \cdots (n-1)n$, para $n \in \mathbb{N}$. Demuestra *por inducción* que, para todo $n \geq 3$, se cumple la desigualdad $2^{n-1} < n!$.

SOLUCIÓN. Observemos que la desigualdad es falsa cuando $n = 1$ o $n = 2$.
La desigualdad se cumple para $n = 3$ ya que $2^2 = 4 < 6 = 3!$. Supongamos que es cierta para un $n \geq 3$, es decir, que $2^{n-1} < n!$ y veamos que también lo es para $n+1$; en otras palabras, que $2^n < (n+1)!$. Observando que $(n+1)! = n!(n+1)$, por la hipótesis inductiva: $2^{n-1} < n!$, vemos que

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} < 2n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!\,,$$

puesto que $2 < n+1$ cuando $n \geq 3$. Esto completa la prueba por inducción para $n \geq 3$.

4. Demuestra *por inducción* que, para todo $n \geq 5$, se cumple la desigualdad

$$2^n > n^2 + 1\,.$$

SOLUCIÓN. La desigualdad se cumple para $n = 5$ ya que $2^5 = 32 > 26 = 5^2 + 1$, con lo cual queda comprobada la base de la inducción.
Esta vez el paso inductivo es algo más difícil que en el problema anterior. Supongamos que la afirmación es cierta para un $n \geq 5$ y veamos que también lo es para $n+1$. Por la hipótesis inductiva, obtenemos que

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(n^2 + 1)\,.$$

Si supiésemos que $2(n^2+1) \geq (n+1)^2 + 1$, la prueba estaría terminada. Observemos que la útima desigualdad es equivalente a $2n^2 + 2 \geq n^2 + 2n + 2$ o, lo que es lo mismo, $n^2 \geq 2n$, lo cual es obviamente cierto ya que $n \geq 5 \geq 2$. Por tanto, $2^{n+1} > (n+1)^2 + 1$, que es lo que queríamos probar.

5. Hallar todos los valores del parámetro a para los que la ecuación cuadrática (en x)

$$x^2 + (2a+1)x - a^2 + 3a = 0$$

tiene exactamente una solución real.

SOLUCIÓN. Para que la ecuación dada tenga solución real única en x, es necesario y suficiente que su discriminante sea nulo:

$$\Delta = (2a+1)^2 - 4(-a^2 + 3a) = 8a^2 - 8a + 1 = 0\,.$$

Esta nueva ecuación cuadrática (esta vez en a) tiene como soluciones los valores

$$\frac{8 \pm \sqrt{32}}{16} = \frac{8 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{16} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

Por tanto, existen exactamente dos valores del parámetro a que se mencionan en el enunciado:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

6. Halla razonadamente todas las soluciones de la ecuación
$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0\,.$$

SOLUCIÓN. Se trata de una *ecuación bicuadrática* ya que, después del cambio de variable $x^2 = t$, ésta se convierte en la siguiente ecuación cuadrática:
$$t^2 - 7t + 12 = 0\,.$$
Resolviendo, obtenemos que las soluciones para t son $t = 3$ y $t = 4$. Finalmente, despejamos la x de $x^2 = t$, obteniendo cuatro soluciones: $x = \pm\sqrt{3}$ y $x = \pm 2$. Las comprobaciones directas en la ecuación inicial muestran que los cuatro valores son en efecto soluciones de la ecuación.

7. Demuestra razonadamente que la desigualdad $x^2 + 5x + 8 > 0$ se cumple para todo x real.

SOLUCIÓN. Solución 1. Una forma de hacerlo es completando el cuadrado, según la fórmula estándar:
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\,.$$
Tomando $y = 5/2$, observamos que
$$x^2 + 5x + 8 = x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 8 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0\,,$$
ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo.

Solución 2. Otra manera de hacerlo, usando métodos más avanzados, sería observando que la función $f(x) = x^2 + 5x + 8$ es continua y no tiene ceros reales, luego o es siempre positiva o es siempre negativa, según el teorema de Bolzano del valor intermedio. Como $f(0) = 8$, se sigue que es siempre positiva. Hablaremos de este método en otro capítulo del programa (continuidad de funciones reales).

8. Encuentra razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple la desigualdad $x^3 \leq 1$.

SOLUCIÓN. (I) Una forma de resolver el ejercicio consiste en ver que la función $f(x) = x^3$ es no decreciente: si $x \leq y$ entonces $x^3 \leq y^3$. Luego, si $x \leq 1$, se sigue que $x^3 \leq 1^3 = 1$; sin embargo, si $x > 1$, entonces $x^3 > 1^3 = 1$. Luego, $x^3 \leq 1$ es cierto sólo si y sólo si $x \leq 1$.

(II) Otra solución consiste en ver que $x^3 \leq 1$ es equivalente a $x^3 - 1 \leq 0$ y recordar la factorización de la diferencia de dos cubos:
$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)\,.$$
El trinomio cuadrático $x^2 + x + 1$ es siempre estrictamente positivo ya que tiene el coeficiente principal positivo y no tiene ceros, pues su discriminante es $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0$. Por tanto, el producto de arriba es ≤ 0 si y sólo si el factor $x - 1 \leq 0$, es decir, si y sólo si $x \leq 1$.

9. Encuentra razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisface la siguiente desigualdad: $|x^2 + 2x + 1| \leq 4$.

Solución. Solución 1. Observemos que la expresión dentro del valor absoluto es un cuadrado. Y entonces

$$|x^2+2x+1| \le 4 \iff |(x+1)^2| \le 4 \iff (x+1)^2 \le 4 \iff |x+1| \le 2,$$

(conviene recordar que $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$), que finalmente nos dice que $-2 \le x+1 \le 2$, es decir, que $-3 \le x \le 1$.

Solución 2. Podemos escribir que

$$|x^2+2x+1| \le 4 \iff -4 \le x^2+2x+1 \le 4,$$

y calcular los valores de x que verifican, simultáneamente, que $x^2+2x-3 \le 0$ y que $x^2+2x+5 \ge 0$. La segunda se cumple para todo x, mientras que la primera nos da el rango $x \in [-3,1]$.

Solución 3. También podemos decidir cuándo x^2+2x+1 es positivo y negativo. Como es siempre positivo,

$$|x^2+2x+1| \le 4 \iff x^2+2x+1 \le 4 \iff x^2+2x-5 \le 0,$$

que nos vuelve a dar el rango $x \in [-3,1]$.
En realidad, las tres estrategias son (casi) lo mismo.

10. Determina razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple que

$$|x^2-4x+4| \le 25\,.$$

Solución. El problema se puede hacer de varias maneras. Aquí indicaremos la más simple:

x^2-4x+4 es un cuadrado perfecto, lo que simplifica bastante los cálculos. De hecho,

$$x^2-4x+4 = (x-2)^2 \implies |x^2-4x+4| = |(x-2)^2| = |x-2|^2$$

(recordando que $|a|^2 = a^2$ para todo $a \in \mathbb{R}$), por lo que

$$\begin{aligned} |x^2-4x+4| \le 25 &\iff |x-2|^2 \le 25 \\ &\iff |x-2| \le 5 \\ &\iff -5 \le x-2 \le 5 \\ &\iff -3 \le x \le 7\,. \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos razonar que el conjunto dado por la desigualdad $|x-2| \le 5$ es un intervalo cerrado (por el $\le$) de centro 2 y de radio 5; por tanto el conjunto pedido es el intervalo

$$[2-5, 2+5] = [-3,7]\,.$$

11. En combinatoria se define el número $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Fijamos un $n_0 \ge 2$ natural; usa inducción empezando en n_0 para demostrar que para todo $n \ge n_0$ se tiene la desigualdad

$$\binom{n}{n_0} \le (n_0+1)^n\,.$$

SOLUCIÓN. La desigualdad es verdad para $n = n_0$, ya que $\binom{n_0}{n_0} = 1 \leq (n_0+1)^{n_0}$.
Asumiendo que la desigualdad es cierta para un cierto $n \geq n_0$, vamos a examinarla para $n+1$:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{n_0} &= \frac{(n+1)!}{n_0!(n+1-n_0)!} = \frac{(n+1)n!}{n_0!(n+1-n_0)(n-n_0)!}\\ &= \frac{n+1}{n+1-n_0}\cdot\frac{n!}{n_0!(n-n_0)!} = \frac{n+1}{n+1-n_0}\cdot\binom{n}{n_0}.\end{aligned}$$

El segundo factor de la derecha es menor o igual que $(n_0+1)^n$ por inducción; necesitamos estimar el primer factor como menor que n_0+1 para obtener el $(n_0+1)^{n+1}$ deseado. Vamos a ver si es verdad:

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n+1-n_0} \leq n_0+1 \quad &\Longleftrightarrow \quad n+1 \leq (n_0+1)(n+1-n_0)\\ &\Longleftrightarrow \quad n+1 \leq n+1+n_0(n+1)-n_0^2-n_0\\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \leq n_0 n - n_0^2\\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \leq n-n_0\,,\end{aligned}$$

lo cual es cierto por la hipótesis $n \geq n_0$. El enunciado queda probado por inducción.

12. Sea $A = [-3, 2)$. Halla el supremo y el ínfimo de A y su máximo y mínimo (si existen).

SOLUCIÓN. Es claro que $-3 \leq a$ para todo $a \in A$ y, puesto que $-3 \in A$, es el mínimo del conjunto A y, por tanto, también su ínfimo.
Obviamente, $a < 2$ para todo $a \in A$, luego 2 es una cota superior para A. Veamos que es la menor cota superior posible. Si existiese otra cota superior $M < 2$, sería $M = 2-\varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$ pequeño. Observemos que entonces tendríamos que $M < 2 - \frac{\varepsilon}{2} < 2$, así que el número $2 - \frac{\varepsilon}{2} \in A$ y, por tanto, M no sería una cota superior para A (ya que no es $\geq 2 - \frac{\varepsilon}{2}$). Esto nos dice que 2 es la menor cota superior posible para A y, por tanto, $2 = \sup A$. Puesto que $2 \notin A$, el conjunto A no tiene máximo.

13. Sea A el conjunto de números reales definido como $A = \left\{2+n, 2+\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Halla (si existen) su supremo y su ínfimo, y decide si A tiene un máximo o un mínimo.

SOLUCIÓN. Para entender mejor el conjunto, podemos escribir el listado de sus elementos:

$$A = \{3, 4, 5, 6, \ldots, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{4}, \ldots\}.$$

Como n puede tomar cualquier valor entero positivo, los valores $2+n$ crecen tanto como se desee; esto quiere decir que A no admite ninguna cota superior y por tanto no existe el supremo ni el máximo de A.
Por otra parte, como n es siempre positivo n y $1/n$ también lo son, lo que implica que

$$2+n \geq 2, \quad 2+\frac{1}{n} \geq 2$$

y por tanto A tiene a 2 como una cota inferior. Como $1/n$ puede tomar valores tan pequeños como se quiera, se tiene que no hay ningún otro $\alpha > 2$ que pueda funcionar como cota inferior; de hecho, si $\alpha > 2$, $\alpha - 2 > 0$ y (por la propiedad arquimediana vista en clase) existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 2 > \frac{1}{n} > 0$, luego $\alpha > 2 + \frac{1}{n}$. Por ello, 2 es de hecho el ínfimo de A.
Finalmente, para que 2 sea el mínimo de A, 2 debería pertenecer a A. Pero si algún elemento de éste fuera 2, entonces tendríamos que para algún $n \in \mathbb{N}$, $n = 0$ ó $1/n = 0$, lo que es imposible porque n es positivo.

14. Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 2n^3 + 41}{\pi n^4 + en^2 + \sqrt{2}n}\,.$$

SOLUCIÓN. Dado que estamos considerando el cociente de dos polinomios del mismo grado, tenemos una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para hallar el límite, podemos usar el truco habitual de dividir el numerador y el denominador por la potencia más grande de n que aparece en el denominador, que es n^4, obteniendo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 2n^3 + 41}{\pi n^4 + en^2 + \sqrt{2}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{41}{n^4}}{\pi + \frac{e}{n^2} + \frac{\sqrt{2}}{n^3}} = \frac{3}{\pi}\,.$$

15. Determina el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2\,\sqrt{n^2+3n} - n^3\right),$$

SOLUCIÓN. Se trata de una indeterminación de tipo $\infty - \infty$, con lo cual no podemos calcular el límite directamente. Usamos el procedimiento habitual de racionalización (o multiplicación por la expresión con un signo opuesto), basado en la fórmula estándar $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, como sigue:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(n^2\,\sqrt{n^2+3n} - n^3\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2\,\sqrt{n^2+3n} - n^3\right)\left(n^2\,\sqrt{n^2+3n} + n^3\right)}{n^2\,\sqrt{n^2+3n} + n^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\,(n^2+3n) - n^6}{n^2\,\sqrt{n^2+3n} + n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^5}{n^2\,\sqrt{n^2+3n} + n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{\sqrt{1+3/n} + 1}\end{aligned}$$

(en el último paso hemos dividido arriba y abajo por n^3, pues el denominador es comparable con n^3). Escrito así, es inmediato comprobar que el límite es $+\infty$.

16. Calcúlese el límite

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1})\,.$$

SOLUCIÓN. Una vez más, racionalizando el numerador, obtenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n+1) - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}}\,.$$

Dividiendo por n en el numerador y en el denominador, vemos que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n^2+1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}\,.$$

17. Calcula razonadamente el valor del límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$.

SOLUCIÓN. Para este ejercicio, es fundamental recordar el límite básico

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

El término general de la sucesión, $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}$, cumple

$$\frac{1}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)^2 \to e^2\,, \quad n\to\infty\,.$$

Por tanto, $a_n \to \dfrac{1}{e^2}$, $n\to\infty$.

18. Calcula razonadamente el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$.

SOLUCIÓN. Conviene recordar que si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = L$ entonces también $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = L$. En particular,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e\,.$$

Ahora ya resulta fácil calcular el límite dado, usando unas sencillas manipulaciones:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e\,.$$

19. Calcúlese razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2(n+1)}.$$

SOLUCIÓN. Si intentamos ver cómo queda el límite calculando simplemente límites de cada parte de la expresión, obtendremos una indeterminación del tipo 1^∞, ya que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Para resolver la indeterminación, el camino más sencillo es reconocer el límite asociado al número e; en otras palabras,

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}\,,$$

con lo que el límite pedido queda como

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right)^2 = e^2\,.$$

20. Calcúlese razonadamente $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+(-1)^n n}{n^2}$.

SOLUCIÓN. Basta observar que $2n^2 + (-1)^n n$ toma los valores $2n^2 \pm n$ (dependiendo de si n es par o impar) y, por tanto, $2n^2 - n \leq 2n^2 + (-1)^n n \leq 2n^2 + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\frac{2n^2 - n}{n^2} \leq \frac{2n^2 + (-1)^n n}{n^2} \leq \frac{2n^2 + n}{n^2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ya sabemos que tanto el cociente a la izquierda como el que está a la derecha tienden a 2. Por el Teorema del encaje (o del "sandwich"), el término intermedio también converge a 2.

21. La sucesión (a_n) viene dada por la siguiente fórmula recurrente:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Demuestra *por inducción* que $\dfrac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$ para todo $n \geq 2$.

(b) Deduce que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

SOLUCIÓN. Tomamos como proposición $\mathcal{P}(n)$ la desigualdad a demostrar, es decir, $\dfrac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$.

- El caso $\mathcal{P}(2)$ es inmediato, ya que $a_2 = 2$, y $\dfrac{2}{2-1} = 2 \leq a_2 = 2 \leq 2$.
- Asumimos ahora que $\mathcal{P}(n)$ es verdad y procedemos a demostrar $\mathcal{P}(n+1)$ en dos pasos:
  - primero observamos que $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n} + 1 \leq \dfrac{2}{n} + 1 \leq 1 + 1 = 2$, ya que al ser $n \geq 2$ se tiene que $\dfrac{2}{n} \leq 1$;
  - por otra parte,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1 \geq \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)}{n} + 1 = \frac{1}{n-1} + 1 = \frac{n}{n-1};$$

esto no es exactamente lo que queríamos demostrar (que era $a_{n+1} \geq \dfrac{n+1}{n}$), pero es fácil observar que

$$\frac{n}{n-1} \geq \frac{n+1}{n}, \quad \text{ya que } n^2 > (n+1)(n-1) = n^2 - 1.$$

Por lo tanto,

$$a_{n+1} \geq \frac{n}{n-1} \geq \frac{n+1}{n}$$

que era lo que queríamos demostrar.

Una vez conocido el apartado anterior del problema, este límite es una aplicación sencilla del teorema del encaje (o del sandwich):

Como $\dfrac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$ para todo $n \geq 2$, dividiendo por n toda la desigualdad, se obtiene que

$$\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{2}{n},$$

o que

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{2}{n}.$$

Como los límites a derecha e izquierda coinciden y son cero, el límite de $\dfrac{a_n}{n}$ también debe ser cero.

22. La sucesión (a_n) viene dada por la siguiente fórmula recurrente:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{4} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

(a) Demuestra *por inducción* que $a_n > \frac{1}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Prueba que la sucesión es creciente.

SOLUCIÓN. (a) Es obvio que $a_1 > 1/4$.
Supongamos que, para un n fijo, resulta que $a_n > 1/4$. El siguiente término de la sucesión, a_{n+1}, viene dado por

$$a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{4},$$

y como $a_n > 1/4$, resulta que

$$a_{n+1} > 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

que es lo que queríamos probar.
Según el Principio de Inducción, se sigue que $a_n > 1/4$ para todo n natural.

(b) Queremos probar que $a_{n+1} > a_n$ para todo n. Pero como $a_{n+1} = 2a_n - 1/4$, es lo mismo que exigir que

$$2a_n - \frac{1}{4} > a_n \quad \Longleftrightarrow \quad a_n > \frac{1}{4},$$

que ya sabemos que es cierto, por el apartado anterior.

23. Definimos la sucesión a_n mediante la fórmula

$$a_{n+1} = n \cdot a_n,$$

donde $a_1 = 1$. Demuestra que para todo $n \geq 4$ se tiene que $a_n \geq n$.

SOLUCIÓN. El problema pide demostrar que $a_n \geq n$ para $n \geq 4$; para hacerlo usando el principio de inducción, habrá que empezar ésta en $n = 4$. Calculando los primeros términos de la sucesión vemos que

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 6.$$

Observamos que $a_4 \geq 4$, lo que da el inicio de la inducción. Asumimos ahora que $a_n \geq n$ y examinamos a_{n+1}:

$$a_{n+1} = n \cdot a_n \geq n \cdot n = n^2,$$

donde hemos usado la hipótesis de inducción para obtener la desigualdad. Como $n \geq 1$, multiplicando por n positivo en ambos lados obtenemos que $n^2 > n$; como n^2 es un entero se debe tener de hecho que $n^2 \geq n + 1$. Por lo tanto $a_{n+1} \geq n + 1$ que es lo que queríamos demostrar. El enunciado se sigue ahora del principio de inducción.

24. La sucesión $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ viene dada por la fórmula

$$A_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad n \geq 0.$$

Demostrar que A_n es un número natural para todo $n \geq 0$. ¿De qué sucesión se trata?

SOLUCIÓN. Aplicaremos la inducción "de n y $n+1$ a $n+2$". Primero, es fácil ver que

$$A_0 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \frac{10}{10} = 1\,, \quad A_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1\,.$$

Suponiendo que ambos A_n y A_{n+1} son números naturales para cierto n, veremos que A_{n+2} también es natural, comprobando que verifica la relación $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$. (Obviamente, aquí estamos tratando una situación muy especial que en otros contextos sería más complicada.) En efecto, sumando y agrupando los términos (el primero con el tercero y el segundo con el cuarto en la primera igualdad abajo) vemos que

$$\begin{aligned}
A_n + A_{n+1} &= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \\
&\quad \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ahora nos ayuda la siguiente observación:

$$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{(1\pm\sqrt{5})^2}{4} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2\,.$$

Por tanto, volviendo a la cadena anterior de igualdades, vemos que

$$\begin{aligned}
A_n + A_{n+1} &= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} = A_{n+2}\,.
\end{aligned}$$

Vemos, por tanto, que $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ es la célebre sucesión de Fibonacci, ya que $A_0 = A_1 = 1$ y $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$.

25. Decidir si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}e^{n+2}}{\pi^n}$ converge o diverge. Si procede, calcular la suma de la serie.

SOLUCIÓN. Observemos que nuestra serie es geométrica con razón $q = -e/\pi$, ya que el cociente de cada dos términos sucesivos es

$$\frac{\frac{(-1)^{n+2}e^{n+3}}{\pi^{n+1}}}{\frac{(-1)^{n+1}e^{n+2}}{\pi^n}} = -\frac{e}{\pi}\,.$$

Además,

$$\left|-\frac{e}{\pi}\right| = \frac{e}{\pi} < \frac{e}{3} < 1\,,$$

con lo cual la serie converge. Según la fórmula para la suma de una serie geométrica:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}\,, \qquad |q| < 1\,,$$

la suma en este caso ($a = e^2$, $q = -e/\pi$) es

$$\frac{e^2}{1+\frac{e}{\pi}} = \frac{\pi e^2}{\pi + e}\,.$$

26. Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ converge o diverge. Justifica tu respuesta.

SOLUCIÓN. Observemos que $\dfrac{1}{n(n+2)}$ se puede descomponer en **fracciones simples** como sigue:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+2)-n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\,.$$

Esto nos permite ver que nuestra serie tiene sumas parciales *telescópicas* (la mayoría de los términos aparecen dos veces, la segunda vez tres lugares después de la primera aparición y con el signo opuesto):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \frac{1}{2}\Bigg((1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + (\frac{1}{4}-\frac{1}{6}) + +(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}) \\ &\quad + \ldots + (\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})\Bigg) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \to \frac{3}{2}\,, \quad n \to \infty\,.\end{aligned}$$

Por consiguiente, la serie converge y su suma es igual a $3/2$.

27. Decide razonadamente si converge o no la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)\,\log(n+1)}\,.$$

SOLUCIÓN. Puesto que para todo $n \ge 2$ se cumple que $\log(n+1) \ge \log 3 > \log e = 1$, se sigue que

$$0 < \frac{1}{n(n+2)\,\log(n+1)} \le \frac{1}{n(n+2)}\,, \qquad n \ge 2\,.$$

El apartado (a) y el criterio de comparación nos dicen que la serie converge.

28. Estudiar la convergencia de la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}\,,$$

justificando la respuesta.

SOLUCIÓN. Podemos aplicar el *Criterio del término general*: la serie diverge porque su término general no tiende a 0. De hecho,

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$$

no existe: la sucesión es oscilante ya que $\frac{n^2}{n^2+1}$ converge a 1, mientras que $(-1)^n$ alterna su valor entre 1 y -1.

29. Estudia la convergencia de la serie infinita

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!+\sqrt{3}}\,.$$

SOLUCIÓN. Conviene observar que

$$n!+\sqrt{3} > n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n \geq (n-1)n$$

y, por tanto,

$$0 < \frac{1}{n!+1} < \frac{1}{(n-1)n}\,, \qquad n\geq 2\,.$$

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ se ha visto en clase en algunos grupos: es *telescópica* y convergente, con suma uno. Alternativamente, puede verse que es convergente aplicando el *Criterio asintótico* ya que

$$\frac{1}{(n-1)n} \sim \frac{1}{n^2}\,, \qquad n\to\infty\,.$$

(Esta última afirmación se comprueba dividiendo los términos y viendo que el cociente, $n/(n-1)\to 1$, cuando $n\to\infty$.)

Finalmente, aplicando el *Criterio de comparación*, concluimos que la serie inicial converge.

30. Decide si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$$

converge o diverge, justificando adecuadamente la respuesta.

Solución. Observa que es una serie de términos positivos. El término general de la serie,

$$a_n = \tfrac{\sqrt{n}+1}{n+2} \to 0\,, \qquad n \to \infty\,,$$

como es necesario para la (hipotética) convergencia (pero no es suficiente). Además, es asintóticamente equivalente a $1/\sqrt{n}$, como se comprueba fácilmente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}+1}{n+2}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{n+2} = 1.$$

Aplicando el *Criterio asintótico* y recordando que $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (siendo ésta una serie p-armónica con $p = 1/2 < 1$), deducimos que la serie del enunciado también diverge.

31. Decide razonadamente si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+3}$$

converge o diverge.

Solución. Argumentamos como en el caso de la serie anterior, pero ahora la comparación (asintótica) correcta es con $1/n^{3/2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+n+3}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\,n^{1/2}}{n^2+n+3} = 1.$$

Aplicando el *Criterio asintótico* y recordando que $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, deducimos que la serie del enunciado también converge.

32. Estudia razonadamente la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$. Si usas algún criterio específico, nómbralo y explica cómo se ha aplicado.

Solución. La potencia n-ésima en el término general de la serie sugiere usar el criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{4} = \frac{1}{4},$$

donde hemos usado que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, y que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}^{\,2}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

Como $\dfrac{1}{4} < 1$, el criterio de la raíz asegura que la serie converge.

33. Estudia razonadamente la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{n+2}}{2^n (\log n)^n}$.

> Solución. El término general contiene varias potencias. Podemos aplicar el *Criterio de la raíz*:
>
> $$\sqrt[n]{\frac{e^{n+2}}{2^n (\log n)^n}} = \frac{e^{\frac{n+2}{n}}}{2\log n} = \frac{e^{1+\frac{2}{n}}}{2\log n} \to 0\,, \qquad n \to \infty\,,$$
>
> puesto que el numerador tiende a e y el denominador tiende al infinito. Puesto que el límite es menor que uno, la serie converge.

34. Decide razonadamente si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$$

converge o diverge. Nombra o enuncia el criterio utilizado.

> Solución. La serie es positiva, siendo su término general $a_n = \dfrac{7^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$. Puesto que aparecen factoriales, es conveniente aplicar el test del cociente.
>
> $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{7^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(2n)!}{7^n\cdot(n!)^2}} = \frac{\dfrac{7^{n+1}\cdot((n+1)\cdot n!)^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{(2n)!}{7^n\cdot(n!)^2}} = \frac{7(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{7}{4}\,, \quad n\to\infty\,.$$
>
> Al ser el límite mayor que uno, la serie diverge según el *Criterio del cociente*.

35. Decide la convergencia condicional o absoluta (o, en su caso, la divergencia) de la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n!+2n)}{n^3}\,.$$

> Solución. La serie asociada con valores absolutos converge por el *Criterio de comparación* ya que
>
> $$0 \le \left|\frac{\operatorname{sen}(n!+2n)}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$$
>
> y la serie 3-armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ converge (visto en clase). Por tanto, la serie original converge absolutamente.

36. Determínese si la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2013}}$$

diverge, converge absolutamente o converge condicionalmente, justificando la respuesta.

Solución. Se trata de una serie alternada. No converge absolutamente porque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2013}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2013}}$$

diverge, por comparación asintótica con la serie $\sum_n 1/\sqrt{n}$ (que ya sabemos que diverge).
Por otra parte, es fácil comprobar que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2013}}$ es una sucesión decreciente de números positivos y tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, justo las hipótesis con las que el *criterio de Leibniz* nos permite concluir que la serie converge.
Conclusión: la serie en el enunciado converge condicionalmente.

37. Decida si la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1}$$

converge absoluta o condicionalmente o diverge. Justifique adecuadamente su respuesta, nombrando o enunciando los criterios aplicados.

Solución. Esta serie tiene términos positivos y negativos (de hecho, es alternada, a partir del tercer término), lo que permite varios tipos de convergencia. Mirando lo que se obtiene cuando quitamos el signo al término general de la serie, observamos que es

$$\frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1} \geq 0,$$

lo cual, cuando n es muy grande, se asemeja mucho a $\dfrac{n\sqrt{n}}{n^3}$. Tras simplificar, vemos que esto coincide con $\dfrac{1}{n^{3/2}}$, que es el término general de una p-serie con $p = 3/2$ y por tanto convergente. Para justificar este razonamiento heurístico, usaremos el criterio de comparación asintótica (*i.e*, comparación con límite):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(n^{3/2}-1)}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n^{3/2}}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^3-n^{3/2}}{n^3}}{\dfrac{n^3+1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{1}{n^{3/2}}}{1+\dfrac{1}{n^3}} = 1$$

Como ese límite existe y es mayor que cero, el comportamiento de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1}$ es el mismo que el de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, y por tanto converge.
La serie pedida convergerá por tanto **absolutamente**.

38. Decide la convergencia condicional o absoluta (o, en su caso, la divergencia) de la serie infinita

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n-1}}.$$

SOLUCIÓN. La serie es alternada. Es evidente que la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}\right)_{n=2}^{\infty}$ es positiva y tiende a cero. Además, cuando n crece, también crece $n-1$ y es positiva ($n \geq 2$), luego $\frac{1}{n-1}$ es decreciente y también la sucesión $\frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$. Por el *criterio de Leibniz*, la serie es convergente.

La serie asociada con los valores absolutos, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$, puede compararse con la serie $\frac{1}{4}$-armónica:

$$\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = \frac{1}{n^{1/4}}\,.$$

Recordemos que $\sum_{n} \frac{1}{n^{1/4}}$ diverge por ser $1/4 \leq 1$.

Aplicando el *Criterio de comparación*, se sigue que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n-1}}$ diverge.

En conclusión, la serie inicial converge condicionalmente.

39. Demostrar que si $a_n > 0$, entonces la serie $\sum_{n} \left(\frac{2a_n}{3a_n+2}\right)^n$ converge.

SOLUCIÓN. Es fácil ver que

$$\frac{2a_n}{3a_n+2} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6a_n \leq 6a_n + 4\,,$$

lo cual es cierto. Por tanto, la serie se puede comparar con la geométrica $\sum_{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ y ésta converge por ser su razón $q = 2/3 \in (-1,1)$.

40. Halla el dominio de la función

$$f(x) = \frac{\ln(25-x^2)}{\sqrt{x^2-7x+12}}\,;$$

es decir, el conjunto más grande posible donde la función está definida.

SOLUCIÓN. Por un lado, necesitamos que exista el logaritmo, así que se debe cumplir $25 - x^2 > 0$, es decir, $x^2 < 25$. Esto es equivalente a $|x| < 5$, es decir, a $-5 < x < 5$.

Por otra parte, también necesitamos que se cumpla $x^2 - 7x + 12 > 0$ para que exista la raíz y para que, además, el denominador no sea nulo. Observando que $x = 3$ y $x = 4$ son ceros de este trinomio cuadrático, lo factorizamos como $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$. Luego es fácil ver por los métodos estándares de resolver desigualdades (vistos en el primer tema de repaso en este curso) que $x^2 - 7x + 12 > 0$ se cumple si y sólo si $x < 3$ ó $x > 4$.

Por tanto, el dominio de f está formado por aquellos valores que a la vez están en el intervalo $(-5,5)$ y en uno de los intervalos $(-\infty,3)$ ó $(4,+\infty)$. Finalmente, concluimos que $D(f) = (-5,3) \cup (4,5)$.

41. Determina razonadamente el dominio y la imagen (el rango) de la función $f(x) = \sqrt{25-x^2}$.

Solución. De manera similar a la del ejercicio anterior, vemos que la raíz existe cuando $25 - x^2 \geq 0$, esto es, para $x \in [-5, 5]$.
Para esos valores de x, la función x^2 toma todos los valores posibles en el intervalo $[0, 25]$. Veámoslo: si $-5 \leq x \leq 5$, entonces $0 \leq x^2 \leq 25$; también, si y es cualuier valor real que satisface $0 \leq y \leq 25$, entonces existe $x = \sqrt{y}$ y satisface $x^2 = y$ y $0 \leq x \leq 5$.
Por lo anterior, $25 - x^2$ toma todos los valores posibles en el mismo intervalo (ya que $0 \leq y \leq 25 \iff 0 \leq 25 - y \leq 25$). Luego $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ toma todos los valores posibles en $[0, 5]$. Por tanto, la imagen de f es el conjunto $f([-5, 5]) = [0, 5]$.

42. Determina las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ (indicando sus dominios), donde $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

Solución. Recordemos que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Para que exista esta función, tiene que existir $g(x)$. Eso es cierto para todo x real, dado que $x^2 + 4 \geq 4 > 0$. Luego

$$f(g(x)) = \sqrt{g(x)^2 - 4} = \sqrt{(x^2 + 4) - 4} = \sqrt{x^2} = |x| .$$

Observemos también que la existencia de $\sqrt{g(x)^2 - 4}$ requiere que se cumpla $g(x)^2 - 4 \geq 0$ y que eso es siempre cierto, dado que $g(x)^2 - 4 = x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, la composición $f \circ g$ existe para todo x, así que su dominio es $\mathbb{R}$.
Para que exista $g(f(x))$, primero es necesario que exista $f(x)$, lo cual ocurre sólo para $x^2 - 4 \geq 0$, es decir para $|x| \geq 2$ (o, dicho de otra manera, $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$). Para esos valores, siempre existirá

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)^2 + 4} = \sqrt{(x^2 - 4) + 4} = \sqrt{x^2} = |x| .$$

En resumen, ambas funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ coinciden (en cuanto a sus valores) con la función valor absoluto, pero tienen dominios distintos.

43. Demuestra que $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 2x) = 15$ por definición (con ε y δ) y también usando sucesiones.

Solución. **Límite por definición**. Necesitamos demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - 3| < \delta$ implica $|x^2 + 2x - 15| < \varepsilon$. Para ello, nos conviene la siguiente factorización:

$$|x^2 + 2x - 15| = |(x^2 - 9) + (2x - 6)| = |(x - 3)(x + 3) + 2(x - 3)| = |(x - 3)(x + 3 + 2)| = |x - 3| \cdot |x + 5| ,$$

puesto que $x = 3$ es una raíz de la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$.
Si $0 < \delta < 1$ y $|x - 3| < \delta$, tendremos automáticamente $|x - 3| < 1$, lo cual es equivalente a $-2 < x < 4$ y, por tanto, se seguirá que $3 < x + 5 < 9$; luego podremos decir con seguridad que $|x + 5| < 9$. Así que basta elegir $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \varepsilon/9$ y $\delta < 1$ a la vez. Entonces cuando $|x - 3| < \delta$, sabremos que también $|x + 5| < 9$ y, por tanto,

$$|x^2 + 2x - 15| = |x - 3| \cdot |x + 5| < \delta \cdot 9 \leq \varepsilon .$$

Límite por sucesiones. Hemos de demostrar que, para cada sucesión $x_n)_n$ tal que $x_n \to 3$ y, posiblemente, $x_n \neq 3$, se satisface la igualdad $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n^2 + 2x_n) = 15$. Esto se sigue de las propiedades básicas de los límites de sucesiones, ya que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^2 = 9$, $\lim\limits_{n \to \infty} 2x_n = 6$ y el límite de la suma es la suma de los límites.
Como se puede ver, suele ser mucho más simple comprobar un límite por sucesiones que por definición.

44. Calcula razonadamente el valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1}\,,$$

evitando cualquier método avanzado (como la regla de L'Hopital).

SOLUCIÓN. Primero observamos que tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to 0$, luego no podemos aplicar las reglas habituales para límites, sustituyendo el valor $x = 0$ directamente en la fracción. (Tenemos un límite de tipo $0/0$.) Por tanto, tenemos que recurrir a otro método.
Como un primer paso, vamos a racionalizar el denominador, con el fin de obtener la diferencia de dos cuadrados en el denominador:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+1}+1)}{x}\,.$$

Ahora tenemos x en el denominador, pero no se ve claramenté cómo cancelar esta expresión con la que tenemos en el numerador, para luego poder pasar al límite cuando $x \to 0$. Por ello, repetimos el proceso de racionalización, pero esta vez con la expresión en el numerador (con el fin de crear una x en el numerador, permitiendo así la cancelación):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+1}+1)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+4}-2)}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}+1)x}{(\sqrt{x+4}+2)x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+4}+2} \\
&= \frac{\sqrt{0+1}+1}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Conviene recordar que no hay problemas para cancelar la x en la fracción, ya que para evaluar el límite en $x = 0$ sólo nos interesan los valores de la función en los puntos cercanos a $x = 0$, pero no el propio punto $x = 0$.

45. Usando la fórmula conocida: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (que se puede justificar de varias maneras, alguna de ellas avanzada para este capítulo), se pide calcular de manera elemental los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(5x)}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{tg}(7x)}\,.$$

SOLUCIÓN. Nótese que la fórmla básica implica que también se cumple

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} = 1\,.$$

Dividiendo el numerador y el denominador por x en el límite cuyo valor se pide, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}\cdot 3}{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}\cdot 5} = \frac{3}{5}\,.$$

De manera similar, observando que $\lim_{x\to 0} \cos(7x) = \cos 0 = 1$, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{tg}(7x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}{\frac{\operatorname{tg}(7x)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\cdot 2}{\frac{\operatorname{sen}(7x)}{7x}\cdot 7} = \frac{2}{7}\,.$$

46. ¿Cuáles de los siguientes límites existen y son finitos?

$$\lim_{x\to 0} x^{1/3}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,, \qquad \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\,.$$

SOLUCIÓN. El primer límite es cero por el teorema del encaje (o del "sandwich"), visto en clase, puesto que

$$0\le \left|x^{1/3}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \le |x|^{1/3}\to 0\,,\quad x\to 0\,.$$

Esto significa que $\left|x^{1/3}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|\to 0$ cuando $x\to 0$ y, por tanto, $x^{1/3}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\to 0$ cuando $x\to 0$. Alternativamente, podemos deducir que

$$-|x|^{1/3}\le x^{1/3}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\le |x|^{1/3}$$

y, dado que ambos extremos tienden a 0 cuando $x\to 0$, la expresión en el medio también hace lo mismo.

La segunda función, por ser un coseno, toma todos los valores entre -1 y 1 cuando $x\to 0$, ya que $1/x$ puede tomar valores arbitrariamente grandes y por ello es fácil encontrar sucesiones a lo largo de las cuales los valores de la función tienden a valores diferentes. Por ejemplo, podemos elegir las sucesiones

$$x_n=\frac{1}{2\pi n}\to 0\,,\quad t_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\to 0\,,\quad n\to\infty\,.$$

Resulta que $f(x_n)=1\to 1$ mientras que $f(t_n)=0\to 0$, luego el límite $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ no existe, debido al criterio de las sucesiones para la existencia del límite.

47. Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si}\quad x<-2,\\ x^2+bx+5 & \text{si}\quad -2\le x\le 0\\ x+c & \text{si}\quad x>0.\end{cases}$$

Estudia la continuidad de la función f en los puntos -2, -1 y 3 en función de los valores de los parámetros a, b y c.

SOLUCIÓN. En el intervalo $(0,+\infty)$ la función viene dada como una función lineal: $x+c$. Para cualquier valor fijo de c, ésta es continua en todos los puntos de dicho intervalo y, en particular, en $x=3$. Los otros dos parámetros no intervienen y, por tanto, sus valores también pueden ser cualesquiera.

De manera análoga, la función $2x+a$ es continua en $(-\infty,-2)$, sea cual sea el valor del parámetro a (y lo mismo para b y c) y, por tanto, es continua en $x=-1$.

Sin embargo, la función f está definida de dos maneras diferentes a la izquierda y a la derecha del punto $x=-2$. Por tanto, hay que examinar los límites laterales de f en dicho punto, que son:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(2x+a)=-4+a\,,\qquad \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(x^2+bx+5)=9-2b\,.$$

Por definición, f es continua en $x=-2$ si y sólo si coinciden sus límites laterales y son iguales al valor de la función en dicho punto; es decir, si y sólo si $-4+a=9-2b$, lo cual es equivalente a $a+2b=13$. La continuidad en $x=-2$, por tanto, no depende del valor de c.

48. Demuestra que la función

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+1}-1}$$

toma el valor $1/3$ en algún punto $c \in [1,6]$.

SOLUCIÓN. Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Esta función es obviamente elemental y existe con seguridad cuando $\sqrt{x+1} > 1$, es decir, para $x > 0$. En particular, existe para los valores de x en $[1,6]$, que son los que nos interesan. Al ser f una función elemental (obtenida aplicando las operaciones algebraicas y composiciones a las funciones polinómicas y sus inversas, en este caso), se sigue que f es continua en el intervalo cerrado $[1,6]$. Además, $f(1) = 0 < 1/3$ y $f(6) = \dfrac{1}{\sqrt{7}-1}$. Es fácil ver que este último valor es $> 1/3$ ya que $\sqrt{7}-1 < 3$ (cierto porque $\sqrt{7} < 4$). Por el teorema del valor intermedio de Bolzano, en algún punto $c \in [1,6]$ se cumple $f(c) = 1/3$.

49. Demuestra que la función

$$2x^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1/2$$

tiene un cero en cada uno de los intervalos $I_1 = [-1,0]$ e $I_2 = [0,1]$.

SOLUCIÓN. La pregunta se reduce al estudio de los ceros de la función

$$f(x) = 2x^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

en cada uno de los intervalos indicados. Observemos que f es una función elemental y, por tanto, continua en el intervalo $[-1,2]$. Puesto que

$$f(-1) = 2 - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 0\,, \qquad f(0) = -\frac{1}{2} < 0\,,$$

el teorema de Bolzano nos garantiza la existencia de un cero de f en el intervalo I_1.
Lo mismo ocurre con I_2 ya que

$$f(0) = -\frac{1}{2} < 0\,, \qquad f(1) = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0\,.$$

50. Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ que cumplen $f(0) = g(1) = 0$ y $f(1) = g(0) = 1$. (Conviene dibujar un par de gráficas a modo de ejemplo.) Demuéstrese que existe un punto $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = g(c)$.

SOLUCIÓN. Consideremos la diferencia $h(x) = f(x) - g(x)$. Obviamente, $h \in C[0,1]$. Además,

$$h(0) = f(0) - g(0) = 0 - 1 = -1 < 0 \quad \text{y} \quad h(1) = f(1) - g(1) = 1 - 0 = 1 > 0\,.$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) - g(c) = 0$.

51. Para $x > 0$, calcula la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ por definición.

SOLUCIÓN. Puesto que la función $\sqrt{x}$ está definida $[0, +\infty)$, para $x > 0$ ciertamente está definida en un intervalo abierto alrededor de x, por ejemplo, en $(0, 2x)$. Aplicando la definición y racionalizando el denominador, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,. \end{aligned}$$

Obsérvese que esto concuerda con la regla general $(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \in \mathbb{R}$, cuando $x > 0$ y $a = 1/2$.

52. Aplicando el método de inducción matemática, demuestra que la derivada de $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, viene dada por la fórmula $f'(x) = nx^{n-1}$. (Obsérvese que de esta forma somos capaces de comprobar la fórmula más general vista en clase para ciertos valores del exponente.)

SOLUCIÓN. Primero comprobamos la base de la inducción. La fórmula es cierta para $n = 1$ ya que se reduce a $(x)' = 1$, lo cual es fácil de comprobar o bien por definición o bien geométricamente (la tangente a la gráfica de $y = x$ es la misma recta y tiene pendiente 1).
Supongamos ahora que $(x^n)' = nx^{n-1}$ se cumple para cierto $n \in \mathbb{N}$. Hemos de ver que se cumple $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. Esto se sigue fácilmente de la Regla del producto para las derivadas y de la hipótesis inductiva:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n\,.$$

Esto completa la demostración por inducción.

53. Supongamos que f es una función derivable en un intervalo $(-c, c)$ y que allí cumple la desigualdad $|f(x)| \le 3|x|$. Demuéstrese que $|f'(0)| \le 3$.

SOLUCIÓN. Sustituyendo el valor $x = 0$ en la desigualdad, obtenemos $|f(0)| \le 0$. Como $|f(0)| \ge 0$, se sigue que $f(0) = 0$. Por lo tanto,

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \le 3\,,$$

debido a nuestra condición sobre f. Usando la definición de la derivada en $x = 0$, vemos que

$$|f'(0)| = \left| \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| = \lim_{x\to 0} \left| \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| \le 3\,.$$

Obsérvese que hemos podido intercambiar el límite y el valor absoluto gracias a la continuidad de la función valor absoluto.

54. Encontrar los puntos de intersección de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = e^{x^2-3x}$ en el punto $(3, 1)$ con la tangente a la gráfica de la función $g(x) = \cos(\pi x) - \sqrt{3x}$ en el punto $(3, -4)$.

Solución. Primero, es fácil ver que $f(3) = e^0 = 1$ y $g(3) = \cos/3\pi) - 3 = -4$ y, por tanto, el punto $(3, 1)$ pertenece a la gráfica de f y $(3, -4)$ a la gráfica de g.
La pendiente de la tangente en x a la gráfica de f es la derivada: $f'(x) = (2x - 3)e^{x^2-3x}$ (según la regla de la cadena). Concretamente, $f'(3) = 3e^0 = 3$. Por tanto, la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto indicado es $y = 3(x - 3) + 1 = 3x - 8$.
También por la regla de la cadena, la pendiente de la tangente en x a la gráfica de g es la derivada $g'(x) = -\pi \operatorname{sen}(\pi x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$. Concretamente, $g'(3) = -\pi \operatorname{sen}(3\pi) - \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$. Por tanto, la ecuación de la tangente a la gráfica de g en el punto indicado es $y = -\dfrac{1}{2}(x - 3) - 4 = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$.
Ambas rectas se cortan en los puntos (x, y) donde $y = 3x - 8 = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$. Esto implica que $\dfrac{7}{2}x = \dfrac{11}{2}$, luego $x = \dfrac{11}{7}$ y, por tanto, $y = 3 \cdot \dfrac{11}{7} - 8 = -\dfrac{23}{7}$.

55. ¿Para qué valor real del parámetro a es horizontal en el punto $(0, 1)$ la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - ax^2 - (2a^2 + 3)x + 1$? Se pide razonar la respuesta.

Solución. La pendiente de la tangente en $x = 0$ debe ser cero: $f'(0) = -(2a^2 + 3) = 0$, pero $2a^2 + 3 \geq 3 > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y, por tanto, la derivada no se puede anular. Luego la tangente no es horizonal en dicho punto para ningún valor del parámetro.

56. Halla el dominio e imagen de la función $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 4)}$. Estudia si es par o impar y calcula su derivada en los puntos donde exista.

Solución. Se trata de una función *elemental* ya que f es la composición de la raíz, del logaritmo y del polinomio $x^2 + 4$.
Determinemos primero el dominio de f. Puesto que $x^2 + 4 \geq 4 > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que $\ln(x^2 + 4) > \ln 1 = 0$ para todo x, luego podemos definir la raíz y, por tanto, la función f en todo punto x: $D(f) = \mathbb{R}$.
Hallemos la imagen de f. La función x^2 toma todos los valores no negativos cuando x recorre los reales. Luego $x^2 + 4$ toma todos los valores en el intervalo $[4, +\infty)$. Puesto que la función logaritmo es creciente, se sigue que $\ln(x^2 + 4)$ toma todos los valores en el intervalo $[\ln 4, +\infty)$ y, por tanto, tomando la raíz cuadrada (que también es una función creciente), vemos que f toma todos los valores posibles en el intervalo $[\sqrt{\ln 4}, +\infty)$.
La función es obviamente *par* ya que su dominio, $\mathbb{R}$, es un conjunto simétrico respecto a $x = 0$ y

$$f(-x) = \sqrt{\ln((-x)^2 + 4)} = \sqrt{\ln(x^2 + 4)} = f(x)\,.$$

Finalmente, aplicando la Regla de la cadena, calculamos la derivada (para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2 + 4)}} \cdot \frac{1}{x^2 + 4} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2 + 4)\sqrt{\ln(x^2 + 4)}}\,.$$

57. Determina en qué puntos $x \in \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + x & \text{si } x > 0, \\ x - \dfrac{1}{8} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es derivable.

SOLUCIÓN. Es fácil ver que f es derivable en cualquier punto $x \neq 0$. Por ejemplo, si $a > 0$, en el intervalo $(0, 2a)$ la función f viene representada por la fórmula $\frac{x^2}{2} + x$, una función derivable en $x = a$.
Sin embargo, la función f no es continua en $x = 0$ ya que los límites laterales en dicho punto no coinciden:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2} + x = 0\,.$$

Recordemos que la diferenciabilidad implica la continuidad. Por tanto, al ser discontinua en $x = 0$, se deduce inmediatamente que la función f no es diferenciable allí.

58. Decide razonadamente si la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{si } x > 0, \\ x+2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es: (a) *continua* en el punto $x = 0$; (b) *derivable* en el punto $x = 0$.

SOLUCIÓN. (a) Puesto que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+2) = 2$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+4} = \sqrt{0+4} = 2$, deducimos que existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y es igual a 2. Como $f(0) = 0 + 2 = 2$ también, por definición, f es continua en $x = 0$.

(b) La función NO es derivable en $x = 0$ ya que las pendientes de las tangentes por la izquierda y por la derecha en dicho punto no coinciden. A saber, es fácil ver que $f'_-(0) = 1$. Esto se puede calcular o bien derivando la fórmula $f(x) = x + 2$, aplicable para $x < 0$ y tomando el límite cuando $x \to 0^-$, o bien por definición:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(h+2) - 2}{h} = 1\,.$$

De manera similar, para $x > 0$, la función f viene dada por la fórmula $f(x) = \sqrt{x+4}$ y, por tanto, su derivada para los x positivos es $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$. Luego

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x+4}} = \frac{1}{4}\,.$$

El mismo valor puede calcularse por definición:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h+4} - 2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(h+4) - 4}{h\,(\sqrt{h+4} + 2)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h+4} + 2} = \frac{1}{4}\,.$$

Puesto que

$$f'_+(0) = \frac{1}{4} \neq 1 = f'_-(0)\,,$$

por definición no existe $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$.

59. Calcula el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arc\,tg} x}$.

SOLUCIÓN. El límite tiene la forma "$\frac{0}{0}$" ya que

$$\operatorname{sen}(\operatorname{tg} 0) = \operatorname{sen} 0 = 0\,, \qquad \operatorname{arc\,tg} 0 = 0\,.$$

Aplicando la regla de L'Hopital (junto con la regla de la cadena), obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arc\,tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{\cos 0 \cdot 1}{1} = 1\,.$$

60. Halla el límite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^2+13x}{e^{x^2}}\,.$$

SOLUCIÓN. Por las propiedades de los polinomios y de la función exponencial, tanto el numerador como el denominador tienden a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$. Por consiguiente, obtenemos:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^2+13x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{14x+13}{2x\,e^{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{14x+13}{2x}\frac{1}{e^{x^2}} = 7\cdot 0 = 0\,.$$

Aquí hemos aplicado la versión de la Regla de L'Hopital cuando $x \to +\infty$ (junto con la Regla de la cadena para calcular la derivada del denominador).

61. Calcula razonadamente los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\cos x}$. (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x}$

SOLUCIÓN. (a) El siguiente límite, muy parecido al nuestro:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}$$

es una forma indeterminada de tipo $0/0$. Para calcularlo, habría que aplicar L'Hopital dos veces.
Sin embargo, el límite que se pide puede calcularse sustituyendo de forma directa el valor $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x} = \frac{e^0 - 0 - 1}{\cos 0} = \frac{1-1}{1} = 0\,.$$

(b) Nuestro límite es una forma indeterminada de tipo 1^∞. Conviene convertirlo en un cociente para poder aplicar la regla de L'Hopital. Usaremos la notación

$$L = \lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x}\,.$$

La función logaritmo es continua, luego $\lim \ln \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln f(x)$, para cualquier función positiva y continua f. Esto nos permite intercambiar el logaritmo y el límite, para luego aplicar L'Hopital:

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+} \ln (\cos x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\operatorname{sen} x)}{1} = \lim_{x\to 0^+} (-\operatorname{tg} x) = -\operatorname{tg} 0 = 0\,.$$

Finalmente, $L = e^0 = 1$.

62. Calcula el siguientes límite:

$$L = \lim_{x\to 0^+} (1+7x)^{1/x} \ .$$

SOLUCIÓN. En primer lugar, conviene observar que $1+7x>0$ para los valores pequeños de x ya que $\lim_{x\to 0}(1+7x)=1$, luego existe $\ln(1+7x)$ y es $>\ln 1$ cuando $x>0$. Por consiguiente, $L\geq 0$ (si existe) y tiene sentido hablar de $\ln L$, entendiendo que $\ln 0 = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
Tomando logaritmos y utilizando la continuidad de la función logaritmo, obtenemos

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0^+} (1+7x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \ln (1+7x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+7x)}{x} \,.$$

Una vez más, hemos obtenido un límite de tipo "$\frac{0}{0}$" y podemos aplicar L'Hopital (y la regla de la cadena):

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+7x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+7x}\cdot 7}{1} = 7\,.$$

Por consiguiente, $L=e^7$.

63. Determina razonadamente el límite

$$L = \lim_{x\to 0+} (e^x-1)^x \,.$$

SOLUCIÓN. Razonando como antes, vemos que tiene sentido hablar de $\ln L$. Usando la continuidad del logaritmo y sus propiedades básicas, vemos que

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0+} (e^x-1)^x = \lim_{x\to 0+} \ln(e^x-1)^x = \lim_{x\to 0+} x\ln(e^x-1)\,.$$

El siguiente paso es convertir la expresión que figura en el límite en una fracción:

$$\ln L = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(e^x-1)}{\frac{1}{x}}\,.$$

Puesto que ahora ya tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{\infty}{\infty}$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x\to 0+} \frac{\dfrac{e^x}{e^x-1}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} \frac{x^2e^x}{e^x-1}\,.$$

El último límite puede calcularse de varias maneras. Por ejemplo, podemos aplicar otra vez la regla de L'Hôpital para luego cancelar la fracción:

$$\ln L = -\lim_{x\to 0+} \frac{x^2e^x}{e^x-1} = -\lim_{x\to 0+} \frac{2x\,e^x + x^2e^x}{e^x} = -\lim_{x\to 0+} (2x+x^2) = 0\,.$$

De $\ln L = 0$ se deduce inmediatamente que $L=1$.

64. a) Demuestra que la tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{6x}{\pi} - 4\operatorname{sen}^2(x)$$

es horizontal en algún punto $c \in (0, \pi/6)$.

b) Comprueba que para ese valor c se cumple la condición $\operatorname{sen}(2c) = 3/(2\pi)$.

Solución. a) Puesto que

$$f(0) = 0\,, \qquad f(\pi/6) = 1 - 4\operatorname{sen}^2(\pi/6) = 1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0\,,$$

el Teorema de Rolle nos dice que la derivada de f se anula en algún punto $c \in (0, \pi/6)$ o, lo que es lo mismo, que la tangente a la gráfica de f es horizontal en algún punto $c \in (0, \pi/6)$.
Sólo nos queda calcular la derivada e igualarla a cero en el punto c mencionado arriba:

$$f'(x) = \frac{6}{\pi} - 8\operatorname{sen} x \cos x = \frac{6}{\pi} - 4\operatorname{sen}(2x)\,, \qquad f'(c) = \frac{6}{\pi} - 4\operatorname{sen}(2c) = 0\,.$$

De la última igualdad se sigue que $\operatorname{sen}(2c) = 6/(4\pi) = 3/(2\pi)$.

65. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{\cos x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2}}\,.$$

a) Demuestra que la función f tiene, al menos, un cero en el intervalo $(0, 2)$.

(b) Demuestra, sin calcular explícitamente f', que existe un punto $c \in (-1, 1)$ en el que $f'(c) = 0$.

Solución. (a) Observamos que la función f es cociente de funciones continuas y derivables, y que el denominador nunca se anula, ya que $x^2 + 2 \geq 2$. Por ello, la función f es continua y diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, en el intervalo cerrado $[0, 2]$. Recordando que $\cos x \leq 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, vemos que

$$f(0) = \frac{\cos 0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0\,, \qquad f(2) = \frac{\cos 2 - 4}{\sqrt{6}} \leq \frac{1 - 4}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}} < 0\,.$$

Por el teorema de Bolzano, f toma el valor intermedio 0 en algún punto $c \in (0, 2)$.

(b) Puede razonarse de, al menos, dos maneras sin calcular la derivada. En ambos casos, es fundamental observar que la función f es par ya que

$$f(-x) = \frac{\cos(-x) - (-x)^2}{\sqrt{(-x)^2 + 2}} = \frac{\cos x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} = f(x)\,.$$

Solución 1. Por la observación anterior, $f(-1) = f(1)$. Como f es diferenciable, el teorema de Rolle nos dice que en un punto c del intervalo se tiene $f'(c) = 0$.

Solución 2. Alternativamente, es fácil ver que la derivada de una función par es impar. Sea f par. Entonces $f(-x) = f(x)$ para todo x. Derivando ambos lados, obtenemos que $-f'(-x) = f'(x)$; es decir, $f'(-x) = -f'(x)$, lo cual significa que f' es impar. Y, como es impar, se sigue que $f'(0) = 0$, lo cual demuestra nuestra afirmación.

66. Determina el número exacto de ceros (distintos entre sí) de la ecuación $x^5 + 2x^3 + x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN. Sea $f(x) = x^5 + 2x^3 + x + 1$. Puesto que

$$f(-1) = -1 - 2 - 1 + 1 = -3 < 0\,, \quad f(0) = 1 > 0\,,$$

el teorema de Bolzano implica que f tiene, al menos, un cero en el intervalo $(-1, 0)$.
Si f tuviera dos ceros distintos, digamos a y b, según el teorema de Rolle su derivada tendría también un cero en el intervalo (a, b). Sin embargo, la derivada es

$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$$

y, puesto que $x^2 \geq 0$ y $x^4 \geq 0$ para todo número real x, se sigue que $f'(x) \geq 1 > 0$ para todo x, así que la derivada no se anula.
Luego f no puede tener dos ceros diferentes, así que tiene exactamente uno y éste está en el intervalo $(-1, 0)$.

67. Demuestra la desigualdad $|\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b| \leq \dfrac{1}{2}\,|a - b|$, para $a,\, b \geq 1$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ es derivable y, por tanto, continua en todo $\mathbb{R}$, luego podemos aplicar el Teorema del valor medio de Lagrange a f en cualquier intervalo $[a, b]$, para concluir que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = \frac{1}{c^2 + 1}$$

Puesto que $a,\, b \geq 1$, se sigue que también $c \geq 1$, luego $c^2 + 1 \geq 2$ y, por tanto,

$$\frac{|\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b|}{|a - b|} = \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| = |f'(c)| = \frac{1}{c^2 + 1} \leq \frac{1}{2}\,,$$

que es lo que se pedía demostrar.

68. Sea $f(x) = x + \operatorname{sen}(x/2)$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Demuéstrese que f es biyectiva como función entre los intervalos $(0, \pi)$ y $(0, \pi + 1)$.

(b) Sea $g = f^{-1} : (0, \pi + 1) \to (0, \pi)$ la función inversa de f. (Obsérvese que no es nada fácil encontrar una fórmula explícita para g.) Calcúlese el valor de $g'\left(\dfrac{\pi + \sqrt{2}}{2}\right)$.

SOLUCIÓN. (a) Según la Regla de la cadena y la desigualdad $\cos x \geq -1$, tenemos que

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Así pues, f es (estrictamente) creciente en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, inyectiva. Puesto que

$$f(0) = 0\,, \qquad f(\pi) = \pi + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \pi + 1\,,$$

deducimos que la imagen del intervalo abierto $(0, \pi)$ por f es el intervalo $(0, \pi + 1)$.

(b) Notemos ahora que $\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ y $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi + \sqrt{2}}{2}$. Usando la fórmula para la derivada de la función inversa, se sigue que

$$g'\left(\frac{\pi + \sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{4 + \sqrt{2}}\,.$$

69. Demuestre la desigualdad $\cos x \geq 1 - x^2$.

SOLUCIÓN. Consideramos la función $f(x) = \cos x - 1 + x^2$ definida en toda la recta real. Vamos a calcular dónde alcanza el mínimo global:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x + 2x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = \operatorname{sen} x$$

Esa ecuación tiene la solución obvia $x = 0$, pero queremos ver si puede haber más. Para ello tomamos otra derivada:

$$f''(x) = -\cos x + 2 > 0,$$

por lo tanto $f'(x)$ es siempre creciente y sólo puede tomar el valor cero una vez en $x = 0$. Esto implica que $f(x)$ tiene un único punto crítico en $x = 0$. Como $f''(0) = -1 + 2 = 1 > 0$, f alcanza un mínimo local ahí. Pero

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$$

por lo que ese mínimo debe serlo globalmente. Por ello,

$$f(x) = \cos x - 1 + x^2 \geq f(0) = 0,$$

para todo x, lo que implica la desigualdad pedida.

70. Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x|x - 1|$.

SOLUCIÓN. Usando la definición del valor absoluto, la función f se puede escribir como

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x \leq 1 \\ x(x-1), & x \geq 1 \end{cases}$$

Usando límites laterales, es fácil ver que f no es derivable en $a = 1$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)h - 0}{h} = 1,$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(-1+h)h - 0}{h} = -1$$

y por lo tanto $f'(1)$ no puede existir. Esto quiere decir que a la hora de calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, debemos añadir el punto $x = 1$ a los puntos críticos. Por otra parte,

$$f'(x) = \begin{cases} 1-2x, & x < 1, \\ 2x-1, & x > 1. \end{cases}$$

El único punto donde f' se anula es $x = 1/2$ (observe que $1/2$ se halla en el intervalo $x < 1$, y ahí la derivada es $1 - 2x$). Por lo tanto los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f serán $(-\infty, 1/2)$, $(1/2, 1)$ y $(1, \infty)$. Nos queda sólo comprobar en cuáles de ellos se crece y en cuáles se decrece. Para ello evaluamos f' en un punto de cada intervalo:

- $f'(0) = 1 - 2 \cdot 0 = 1 > 0$, por lo que en $(-\infty, 1/2)$, f crece;
- $f'(3/4) = 1 - 2 \cdot \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2}$, por lo que en $(1/2, 1)$ se decrece,
- y $f'(2) = 4 - 1 = 3 > 0$, por lo que en el intervalo $(1, \infty)$, f crece.

71. Consideremos la función $f(x) = e^{2x^3-x} + 1$.

(a) Estudie el comportamiento de f en los extremos de su dominio y la existencia de las posibles asíntotas horizontales o verticales.

(b) ¿En qué puntos la función f alcanza sus valores máximo y mínimo?

(c) ¿En qué punto corta al eje X la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$?

SOLUCIÓN. (a) Puesto que $\lim_{x\to+\infty}(2x^3 - x) = +\infty$ y $\lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$, se sigue que $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x^3-x}+1) = +\infty$.
Por otra parte, $\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - x) = -\infty$ y $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$, luego $\lim_{x\to-\infty}(e^{2x^3-x} + 1) = 0 + 1 = 1$. Se deduce que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f en la parte negativa cuando $x \to -\infty$.

(b) Aplicando la Regla de la cadena, calculamos la derivada de nuestra función:

$$f'(x) = (6x^2 - 1)e^{2x^3-x}.$$

Puesto que la función exponencial sólo toma valores positivos, el signo de la derivada de f coincide con el de la función $6x^2 - 1$. Ésta se anula en los puntos $\pm 1/\sqrt{6}$, es negativa en el intervalo $(-1/\sqrt{6}, +1/\sqrt{6})$ y positiva en el resto. Por tanto, alcanza su máximo en $-1/\sqrt{6}$ y su mínimo en $+1/\sqrt{6}$.

(c) Puesto que $f'(0) = (-1) \cdot e^0 = -1$ y $f(0) = 2$, la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y - 2 = -x$. La intersección con el eje X se obtiene cuando $y = 0$ y, por tanto, $x = 2$; es decir, en el punto $(2, 0)$.

72. Consideremos la función $f(x) = (x^2 + 3x + 1)\, e^x$.

¿En qué puntos la función f alcanza sus valores máximo y mínimo? Explique si son extremos relativos (locales) o absolutos (globales).

SOLUCIÓN. Primero tenemos que derivar la función f. Aplicando la regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+3x+1)'\, e^x + (x^2+3x+1)\,(e^x)' \\ &= (2x+3)\, e^x + (x^2+3x+1)\, e^x \\ &= (x^2+5x+4)\, e^x \\ &= (x+1)\,(x+4)\, e^x\,. \end{aligned}$$

La última factorización se obtiene observando que las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2+5x+4=0$ son $x=-1$ y $x=-4$.
Recordando que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que el signo de $f'(x)$ es el mismo que el signo de $(x+1)\,(x+4)$ y que los puntos críticos (los ceros de la derivada) de f son $x=-1$ y $x=-4$. La función es positiva para $x<-4$ y también para $x>-1$. Es negativa cuando $-4<x<-1$.
Por consiguiente, f crece en cada uno de los intervalos $(-\infty,-4)$, $(-1,+\infty)$ y decrece en el intervalo $(-4,-1)$.
Esto significa que f tiene un máximo local en $x=-4$ y un mínimo local en $x=-1$. Los valores en esos puntos son:

$$f(-4) = \frac{5}{e^4} > 0\,, \qquad f(-1) = \frac{-1}{e} < 0\,.$$

Para ver si dichos extremos son globales o no, tenemos que examinar el comportamiento de f cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.
Puesto que $x^2+3x+1 \to +\infty$ y $e^x \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, es inmediato que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to +\infty$.
El comportamiento de f cuando $x \to -\infty$ es menos obvio, ya que $x^2+3x+1 \to +\infty$ y $e^x \to 0$. Una vez más, conviene convertir el producto en cociente (forma indeterminada ∞/∞) para luego aplicar L'Hopital (dos veces):

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+1}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} 2e^x = 0\,.$$

En resumen, desde $-\infty$ hasta $x=-4$, la función f crece desde el valor 0 hasta alcanzar el valor positivo $5/e^4$. Entre $x=-4$ y $x=-1$ decrece hasta alcanzar el valor negativo $-1/e$ y desde $x=-1$ hasta $+\infty$ crece teniendo a $+\infty$.
La conclusión final es: f no tiene máximo global y, por tanto, el máximo en $x=-4$ es sólo local. Así mismo, el mínimo en $x=-1$ es absoluto.

73. Considere la función

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(a) Determine para qué valores de x está definida y examine su comportamiento en los extremos del dominio.

(b) Encuentre los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes de las coordenadas.

(c) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de máximo y mínimo de la función.

(d) Finalmente, esboce la gráfica de f.

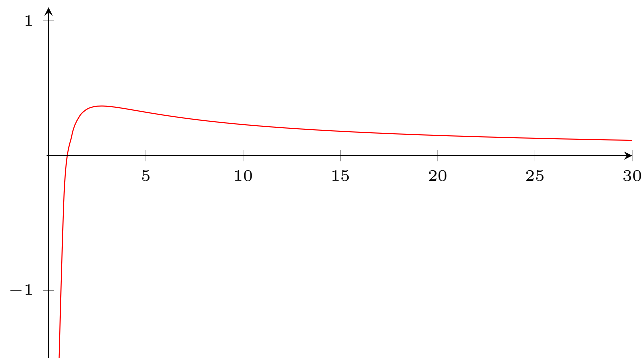
Solución. (a) La función f sólo está definida cuando está definido el logaritmo, así que el dominio es $(0, +\infty)$.
Examinemos el comportamiento en los extremos del dominio y las posibles asíntotas. Cuando $x \to 0^+$, sabemos que $\ln x \to -\infty$; al dividir por x que es pequeño y positivo, vemos que $f(x) \to -\infty$. Eso significa que la recta $x = 0$ (el eje Y) es una asíntota vertical de la gráfica. Por L'Hopital, deducimos inmediatamente que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Por tanto, la recta $y = 0$ (el eje X) es una asíntota horizontal de la gráfica (para los valores grandes de x).
(b) La única intersección con los ejes de las coordenadas se obtiene cuando $y = 0$, es decir, cuando $\ln x = 0$ y eso sólo es posible para $x = 1$. Cuando $0 < x < 1$, sabemos que $\ln x < 0$ y, por consiguiente, f toma valores negativos (su gráfica está por debajo del eje X), mientras que para $1 < x < +\infty$ la función es positiva (esa parte de la gráfica está por encima del eje X).
(c) La derivada de f, según la regla del cociente, es

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

y, por tanto, es nula sólo para $x = e$, positiva en el intervalo $0 < x < e$ (intervalo de crecimiento de f) y negativa en $(e, +\infty)$ (intervalo de decrecimiento). Se sigue que f alcanza su máximo (global) en $x = e$; dicho máximo es igual a $f(e) = 1/e$.
(d) Con estos datos, es fácil esbozar la gráfica, teniendo en cuenta que pasa por los siguientes puntos: $(1/e, -e)$, $(1, 0)$, $(e, 1/e)$, $(e^2, 2/e^2)$.



Aunque eso no se pide, examinando la segunda derivada, podría verse que f tiene un punto de inflexión (donde cambia de convexidad) entre e y $+\infty$; ese punto se puede calcular explícitamente.

74. Estudie la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$. En particular, determine:

- Su dominio y los puntos de continuidad.
- Si es par o impar.
- Los puntos donde f es diferenciable y donde no.
- Los intervalos de crecimiento.
- Los máximos y mínimos locales y globales.
- Dibuje la gráfica de f.

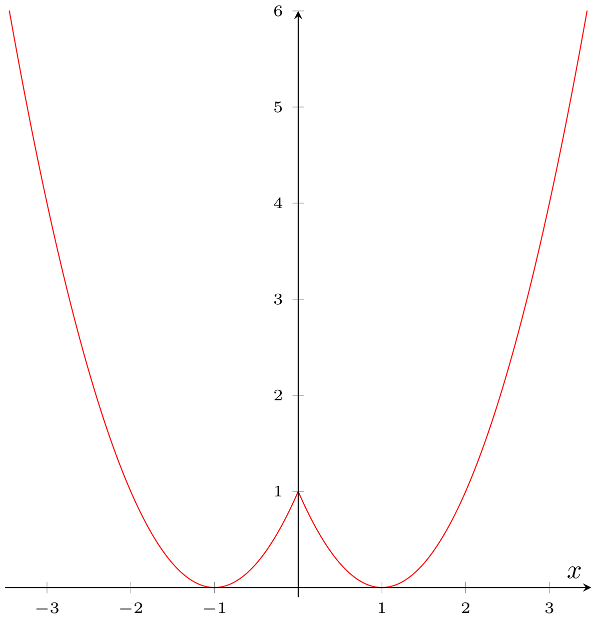
Solución. Recordando que $x^2 = |x|^2$, conviene observar primero que $f(x) = |x|^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2$. Por lo tanto,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{si } x \geq 0, \\ (-x-1)^2 = (x+1)^2, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

La gráfica de f se obtiene, por tanto, juntando la parte de la parábola $y = (x-1)^2)$ contenida en el semiplano derecho ($x \geq 0$) con la parte de la parábola $y = (x+1)^2$ en el semiplano izquierdo ($x \leq 0$). Así que dicha gráfica es simétrica respecto al eje Y (la función f es obviamente par ya que $|x|$ lo es).

La función es continua en todo $x \neq 0$ y también en $x = 0$ ya que $y = (x-1)^2)$ es continua en $[0, +\infty)$ e $y = (x+1)^2$ lo es en $(-\infty, 0]$ y ambas toman valor 1 en $x = 0$; es decir, los límites laterales existen y son iguales a 1, que es el valor de la función en $x = 0$.

Es inmediato ver que $f(x) \geq 0$ para todo x y que toma el valor 0 sólo cuando $|x| = 1$, es decir, para $x = \pm 1$. Por tanto, en esos dos puntos la función alcanza su mínimo global. Puede verse, o bien analizando el signo de la derivada o nuestro conocimiento de las parábolas cuadráticas, que f decrece en $(-\infty, -1)$, crece en $(-1, 0)$, decrece en $(0, 1)$ y vuelve a crecer en $(1, +\infty)$.



Es importante resaltar que la función no es derivable en el punto $x = 0$ ya que la tangente a la gráfica por la derecha tiene la pendiente -2 (la derivada lateral derecha) mientras que la tangente por la izquierda tiene la pendiente 2. Otra forma de ver esto sería constatando que f es la suma de las funciones $x^2 + 1$ y $-2\,|x|$, de las cuales la primera es derivable en todo $\mathbb{R}$ y la segunda es derivable en todo $\mathbb{R}$ menos en el punto $x = 0$.

75. Para la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$, halle su polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$.

SOLUCIÓN. La respuesta es: $P_2(x) = x^2$. Como recordaremos de la teoría vista en clase, los polinomios de Taylor en $a = 0$ de la función $\operatorname{sen} x$ son

$$x\,, \quad x - \frac{x^3}{3!}\,, \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\,,$$

etc. Multiplicándolos por x, obtenemos que los polinomios correspondientes de $f(x)$ son x^2, $x^2 - x^4/3!$, etc. El primero es de grado 2 mientras que el siguiente ya es de grado 4; por tanto, $P_2(x) = x^2$.
Otra manera de llegar a la misma conclusión es calculando

$$f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x\,, \qquad f''(x) = 2\cos x - x \operatorname{sen} x$$

y evaluándolos en $x = 0$, para luego calcular $P_2(x) = f(0) + f'(0) + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 = x^2$.

76. Calcule el polinomio de Taylor de grado 6 de la función $f(x) = \cos x$ en el punto $x = 0$. Utilizando la fórmula anterior, calcule $g^{(8)}(0)$ de la función $g(x) = \cos x^2$.

SOLUCIÓN. Calculando las derivadas de f de todos los órdenes hasta 6 y aplicando la fórmula general para el polinomio de Taylor o, alternativamente, partiendo de la fórmula (vista en clase) para la serie de Taylor de la función coseno en $x = 0$, obtenemos

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

Sustituyendo x^2 en lugar de x, se obtiene el polinomio de Taylor (Maclaurin) de orden 12 de la función g:

$$1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!}$$

El coeficiente al lado de x^8 es igual a $g^{(8)}(0)/8!$. Igualando ambas cantidades, vemos que

$$\frac{1}{4!} = \frac{g^{(8)}(0)}{8!}\,.$$

Despejando, obtenemos

$$g^{(8)}(0) = \frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680\,.$$

77. Determine el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x^2}{8}\,.$$

SOLUCIÓN. Hay varias formas de hacer este problema. La más rápida es usar la fórmula para el polinomio de Taylor de $\cos x$ remplazando la x por $\frac{\pi x}{2}$, y recordar que el polinomio de Taylor de grado 3 de $\frac{\pi^2 x^2}{8}$ centrado en 0 coincide con $\frac{\pi^2 x^2}{8}$. Esto nos daría

$$p_{3,0}(x) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi^2 x^2}{8} = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{8} - \frac{\pi^2 x^2}{8} = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{4}.$$

La otra posibilidad es hallar $f(0), f'(0), \ldots, f'''(0)$ y sustituir en la fórmula del polinomio de Taylor. Esto resulta en

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x^2}{8}, \\
f'(x) &= -\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2 x}{4}, \\
f''(x) &= -\frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi^2}{4}, \\
f'''(x) &= \frac{\pi^3}{8}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right),
\end{aligned}$$

y en

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -\frac{\pi^2}{2}, \quad f'''(0) = 0.$$

Con lo que al sustituir en la fórmula del polinomio de Taylor nos queda el polinomio $p_{3,0}(x)$ anterior.

78. Estime el error de aproximación de la función $f(x) = \cos x$ cerca de $a = 0$ por el polinomio de Taylor de grado 3 y en el punto $x = \frac{1}{10}$.

SOLUCIÓN. Para obtener el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de orden n de la función coseno, tenemos dos formas de proceder:
1) usar el desarrollo de $\cos x$ en serie de Taylor alrededor de $a = 0$; en este caso:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

truncando luego la serie después de la potencia x^n;
2) calcular las derivadas sucesivas $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, …, evaluándolas en $a = 0$, etc.
De cualquiera de las dos maneras, obtendremos:

$$P_0(x) = 1 = P_1(x), \quad P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} = P_3(x), \quad P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = P_5(x), \quad \ldots$$

Los polinomios P_2 y P_3 coinciden porque $f'''(0) = 0$, lo cual significa que no hay ningún término con x^3. Lo que nos interesa en concreto en este caso es $P_3(x) = 1 - x^2/2$ y $x = 1/10$. El error que se comete al aproximar $\cos x$ por $P_3(x)$, según la fórmula vista en clase, es igual a $E = f^{(4)}(c)(x-a)^4/4!$ para algún punto c entre $a = 0$ y $x = 1/10 = 0,1$. Recordando que $f^{(4)}(x) = \cos x$, tenemos la siguiente estimación para E;

$$|E| \leq \frac{|f^{(4)}(c) \cdot 0,1^4|}{24} = \frac{|\cos c| \cdot 0,0001}{24} \leq \frac{0,0001}{24} \approx 0,00004167.$$

79. Si una función es diferenciable dos veces y su segunda derivada es cero, deduzca que la función es lineal: $f(x) = ax + b$, para algunos a, $b \in \mathbb{R}$.

Solución. La igualdad $f''(x) = 0$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$. Integrándola, obtenemos $f'(x) = m$ para cierta constante $a \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$. Integrando esta nueva igualdad, obtenemos $f(x) = ax + b$, para alguna constante $b \in \mathbb{R}$.

80. Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$.

Solución. Aplicando el cambio de variable: $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x \, dx = dt$, la integral se transforma en

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C\,,$$

siendo C una constante arbitraria.

81. Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$, aplicando la relación fundamental entre las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Solución. Observemos que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \,(1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx\,.$$

Al igual que antes, podemos aplicar el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$, obteniendo $\cos x \, dx = dt$. La integral se convierte en

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int t^2(1 - t^2) \, dt = \int (t^2 - t^4) \, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C\,.$$

82. Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \, dx$.

Solución. Aplicando el cambio de variable: $\cos x = t$, $-\operatorname{sen} x \, dx = dt$, la integral se transforma en

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x \, dx = -\int (1 - t^2) dt = -\int (1 - 2t^2 + t^4) dt \\ &= \frac{2t^3}{3} - t - \frac{t^5}{5} + C = \frac{2\cos^3 x}{3} - \cos x + \frac{\cos^5 x}{5} + C\,, \end{aligned}$$

donde la constante C es arbitraria.

83. Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$.

Solución. Aplicando Integración por partes, con $u = \operatorname{arc\,tg} x$ y $dv = dx$, obtenemos

$$du = \frac{1}{x^2 + 1} \, dx\,, \qquad v = x\,.$$

Por lo tanto, según la fórmula para la Integración por partes, se obtiene

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x \, dx}{x^2 + 1} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} + C\,,$$

para una constante C real arbitraria.
(La última integral se suele calcular o bien directamente o bien mediante la sustitución $x^2 + 1 = t$.)

84. Evalúe la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5}\,.$$

SOLUCIÓN. Completando el cuadrado en el denominador:

$$9x^2+6x+5=(3x)^2+2\cdot 3x+1+4=(3x+1)^2+4\,,$$

obtenemos

$$I=\int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5}=\int \frac{dx}{(3x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\cdot\int \frac{dx}{\left(\frac{3x+1}{2}\right)^2+1}\,.$$

Después del siguiente cambio de variable (bastante obvio):

$$(3x+1)/2=t\,,\qquad dx=(2t/3)\,dt\,,$$

se obtiene

$$I=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg} t+C=\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x+1}{2}+C\,,$$

donde C denota una constante real arbitraria.

85. Calcule el valor exacto de la integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

SOLUCIÓN. Aplicando el *cambio de variable* $\sqrt{x}=t$ en nuestra integral definida, obtenemos:

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt\,,\quad x=t^2\,;\qquad x=1:\ t=1\,,\quad x=3:\ t=\sqrt{3}\,,$$

de manera que

$$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}=2\operatorname{arc\,tg} x|_1^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}\,.$$

86. Calcule razonadamente la integral $I=\displaystyle\int_1^3\frac{x\,dx}{x^4+1}$.

SOLUCIÓN. Hacemos el cambio de variable $u=x^2$, con lo que $du=2x\,dx$ y $x^4+1=u^2+1$: la integral queda entonces como

$$I=\int_1^9\frac{du}{2(u^2+1)}$$

(observe que hemos cambiado los límites de la integral de acuerdo con el cambio de variable). En esta integral reconocemos la derivada de la arco tangente, así que

$$I=\frac{1}{2}\int_1^9\frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg} u\right]_1^9=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} 9-\operatorname{arc\,tg} 1\right)$$

Se puede escribir un poco más si se reconoce que $\operatorname{arc\,tg}(1)=\pi/4$.

87. Evalúe la integral definida $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)(9+x^2)}$

SOLUCIÓN. Primero descomponemos la fracción en suma de fracciones simples. Dado que $9+x^2 \geq 9 > 0$, este trinomio cuadrático no tiene ceros reales, luego no se puede factorizar más (en factores lineales con coeficientes reales). Por tanto, según la teoría, buscamos los números reales A, B y C para los que

$$\frac{1}{(x-1)(9+x^2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{9+x^2}$$

para todo x. Multiplicando ambos lados por $(x-1)(9+x^2)$, obtenemos

$$1 = A(9+x^2) + (x-1)(Bx+C) = (A+B)x^2 + (C-B)x + 9A - C\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Comparando los coeficientes del polinomio a la derecha con los del polinomio constante uno, deducimos que

$$A+B=0\,, \quad C-B=0\,, \quad 9A-C=1\,.$$

Por tanto, $B=C=-A$ y $10A=1$, luego $A=1/10$ y $B=C=-1/10$. Finalmente,

$$\frac{1}{(x-1)(9+x^2)} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{x+1}{9+x^2} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{x}{9+x^2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9+x^2}\,.$$

La primera fracción se integra directamente, hay que tener en cuenta que $x-1>0$ puesto que $x \in [\sqrt{3}, 3]$. La segunda fracción se integra usando el cambio de variable $t = 1+x^2$ y la tercera, directamente o poniendo primero $x = 3t$. El resultado final es

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)(9+x^2)} &= \left(\frac{1}{10}\ln(x-1) - \frac{1}{20}\ln(9+x^2) - \frac{1}{30}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{3} \\
&= \frac{1}{10}\ln\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{20}\ln\frac{18}{12} - \frac{1}{30}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{10}\ln(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{20}\ln\frac{3}{2} - \frac{\pi}{360}\,.
\end{aligned}$$

88. Calcule la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \,\cos x}\,.$$

Solución. Primero aplicamos un truco visto en otros ejercicios similares:

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \, \cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x \, \cos^2 x}$$

y luego el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$. Observemos que $|t| < 1$ y $t \neq 0$ puesto que $\operatorname{sen} x \, \cos x \neq 0$. Del cambio de variable obtenemos que

$$dt = \cos x \, dx \,, \qquad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - t^2$$

y, por tanto,

$$I = \int \frac{dt}{t^2 \, (1 - t^2)} = \int \frac{dt}{t^2 \, (1 + t) \, (1 - t)} \,.$$

De esta manera hemos conseguido reducir la integral I a la integral de una función racional de t. Ésta se puede calcular usando las **fracciones simples o parciales**:

$$\frac{1}{t^2 \, (1 + t) \, (1 - t)} = \frac{A}{1 + t} + \frac{B}{1 - t} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t^2} \,.$$

Multiplicando ambos lados por el denominador de la izquierda: $t^2 \, (1 + t) \, (1 - t)$, obtenemos la condición

$$1 = At^2 \, (1 - t) + Bt^2 \, (1 + t) + Ct \, (1 - t^2) + D \, (1 - t^2) \,.$$

Agrupando los términos constantes y los términos que contienen a t, t^2 y t^3 respectivamente, vemos que

$$1 = D + Ct + (A + B - D)t^2 + (-A + B - C)t^3 \,.$$

Para que el polinomio (constante) a la izquierda y el polinomio a la derecha sean iguales para todo $t \in \mathbb{R}$, es necesario y suficiente que sus coeficientes correspondientes sean iguales, luego

$$D = 1 \,, \quad C = 0 \,, \quad A + B - D = 0 \,, \quad -A + B - C = 0 \,.$$

De ahí se sigue inmediatamente que $D = 1$, $C = 0$, $A + B = 1$ y $B = A$. De las dos últimas ecuaciones fácilmente obtenemos $A = B = 1/2$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{t^2 \, (1 + t) \, (1 - t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - t} + \frac{1}{t^2} \,,$$

que es la representación buscada. Puesto que $1 + t > 0$ y $1 - t > 0$ podemos aplicar la formula

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C \,, \qquad x > 0 \,.$$

Integrando obtenemos

$$I = \frac{1}{2} \ln(t + 1) - \frac{1}{2} \ln(1 - t) - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{t + 1}{1 - t} - \frac{1}{t} + C \,,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Finalmente, sustituyendo de nuevo $t = \operatorname{sen} x$, vemos que

$$I = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C \,.$$

89. Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x e^x \, dx$.

SOLUCIÓN. Integrando por partes:

$$u = x\,, \quad dv = e^x\,dx\,, \qquad du = dx\,, \quad v = e^x\,,$$

obtenemos

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C\,.$$

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx = (xe^x - e^x)|_0^{\ln 2} = \ln 2e^{\ln 2} - e^{\ln 2} - (0 - e^0) = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1\,.$$

90. Calcule el área comprendida entre las curvas $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = 4 - x$.

SOLUCIÓN. Los puntos de intersección de las dos gráficas se encuentran resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, $\dfrac{1}{x} = 4 - x$. Para $x \neq 0$, la ecuación es equivalente a $1 = 4x - x^2$, que es lo mismo que $x^2 - 4x + 1 = 0$. Las soluciones de esta ecuación cuadrática son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3},$$

siendo ambas positivas y menores que 4 ya que $2 > \sqrt{3}$. Observando las gráficas de las funciones f y g entre $x = 2 - \sqrt{3}$ y $x = 2 + \sqrt{3}$, vemos que $g(x) > f(x)$ en dicho intervalo y que encierran una región en forma parecida a la de media luna, contenida en el triángulo con los vértices $(0,0)$, $(4,0)$ y $(0,4)$. Esto se puede comprobar algebraicamente, pues en el intervalo $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ se cumple $x^2 - 4x + 1 < 0$, luego $1 < 4x - x^2$ y, al ser x positivo, podemos dividir por x para deducir que $4 - x > \dfrac{1}{x}$.
El área entre las dos gráficas es, por tanto,

$$A = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left(4 - x - \frac{1}{x}\right)\,dx = (4x - \frac{x^2}{2} - \ln|x|)\Big|_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\,.$$

91. Calcule la derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{e^x+x} \ln(t^2+1)\,dt$.

SOLUCIÓN. Primero representamos F como diferencia de dos integrales:

$$F(x) = \int_{x^2}^{e^x+x} \ln(t^2+1)\,dt = \int_0^{e^x+x} \ln(t^2+1)\,dt - \int_0^{x^2} \ln(t^2+1)\,dt\,.$$

Derivando cada integral por separado (como en el problema anterior), obtenemos:

$$F'(x) = (e^x+1)\ln((e^x+x)^2+1) - 2x\ln(x^4+1)\,.$$

92. Halle los máximos y mínimos locales de la función F que viene dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$.

Solución. Conviene recordar el comentario hecho en clase que la integral indefinida $\int e^{-t^2}\,dt$ NO es una función elemental (no existe una "fórmula cerrada" para expresarla). De ahí que estudiamos la integral $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ y similares. Considerando la función $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, vemos que F es la función compuesta de g y $h(x) = x^2$, es decir: $F(x) = g(x^2) = g(h(x))$. Por tanto, la *Regla de la Cadena* y el *Segundo Teorema Fundamental del Cálculo* nos dicen que

$$F'(x) = g'(x^2) \cdot 2x = 2xe^{-x^2}\,.$$

Es obvio que $F'(x) = 0$ sólo cuando $x = 0$ (es decir, F sólo tiene ese punto crítico). Puesto que $e^{-x^2} > 0$ para todo x real, concluimos que $F'(x) > 0$ para $x > 0$ y $F'(x) < 0$ para $x < 0$. Por lo tanto, F decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$ y, por consiguiente, tiene un mínimo absoluto en $x = 0$. El valor mínimo es $F(0) = 0$.

93. Si $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $\int_0^1 f(t)\,dt = 1$, ¿es cierto que siempre existe $c \in (0,1)$ tal que $\int_0^c f(t)\,dt = \frac{1}{3}$? Razone la respuesta.

Solución. Sí, esto se cumple siempre. Damos la prueba a continuación.
En primer lugar, puesto que $f \in C[0,1]$, podemos definir la función F mediante

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

Según el *Teorema Fundamental del Cálculo*, F es diferenciable y, por tanto, continua en el mismo intervalo. Además, F cumple

$$F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0\,, \qquad F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = 1\,.$$

Puesto que $0 < 1/3 < 1$, por el *Teorema de Bolzano* se sigue que existe $c \in (0,1)$ tal que $F(c) = 1/3$; es decir,

$$\int_0^c f(t)\,dt = \frac{1}{3}\,.$$

94. (a) Determine los puntos críticos de la función

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,, \qquad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\,,$$

en el intervalo indicado. (Nótese que $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ no se puede expresar con fórmulas habituales.)

(b) Razone si los puntos críticos encontrados son puntos de máximo o mínimo o no.

SOLUCIÓN. (a) Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, derivamos la función F, obteniendo

$$F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,, \qquad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Para encontrar los puntos críticos de F, igualamos la derivada a cero y obtenemos $\operatorname{sen} x = 0$. Recordando que $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, la única posibilidad es $x = \pi$.

(b) Para decidir si el punto crítico encontrado, $x = \pi$, es un punto de extremo local o no, calculamos la segunda derivada de F (aplicando la regla del cociente) y examinamos su signo en dicho punto:

$$F''(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\,; \quad F''(\pi) = \frac{\pi\cdot(-1) - 0}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi} < 0\,.$$

Por tanto, el punto crítico es un punto de máximo local.

95. Definamos la función F mediante la fórmula $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule razonadamente su derivada, $F'(x)$. Luego determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de máximo y mínimo de la función F.

(b) Determine los intervalos de convexidad y concavidad de F y los puntos de inflexión.

SOLUCIÓN. (a) La función f es composición de las funciones $G(x) = \displaystyle\int_0^{x} e^{-t^2}\,dt$ y de $g(x) = x^2$, i.e, $F(x) = G(g(x))$. Por la regla de la cadena,

$$F'(x) = G'(g(x))\cdot g'(x) = e^{-(x^2)^2}\cdot 2x = 2xe^{-x^4}$$

donde hemos usado que por el teorema fundamental del cálculo, $G'(x) = e^{-x^2}$.
Para calcular intervalos de crecimiento y decrecimiento, buscamos los intervalos donde $F'(x)$ sea positiva y negativa. $F'(x)$ tiene un único cero, ya que e^{-x^4} es siempre positivo, y $F'(x)$ sólo se anulará donde lo haga x; además $F'(x)$ tiene el signo de x; por ello, F es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, infty)$. Esto implica que F tiene un único mínimo en $x = 0$, que además debe ser un mínimo global.
(b) Empezamos calculando la segunda derivada de F:

$$F''(x) = e^{-x^4} + x(-4x^3)e^{-x^4} = (1-4x^4)e^{-x^4}$$

F'' se anula sólo cuando $1 - 4x^4 = 0$, lo que ocurre en los puntos $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Por ello examinamos el signo de F'' en los intervalos $(-\infty, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, \infty)$ evaluando F'' en un punto de cada uno:

$$F''(-1) = -3e^{-1} < 0, \quad F''(0) = 1, \quad F''(1) = -3e^{-1}$$

Por lo tanto F es cóncava en $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, \infty)$ y convexa en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Los puntos $x = -1/\sqrt{2}$ y $1/\sqrt{2}$ corresponden a puntos de inflexión, ya que se cambia de cóncavo a convexo o viceversa.

96. Compruebe si la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx$ converge o diverge. Use la conclusión obtenida para decidir la convergencia o divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$.

SOLUCIÓN. Integrando por partes, con la elección $u = x$, $dv = e^{-x}$, obtenemos

$$du = dx\,, \quad v = -e^{-x}$$

y

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx = (-x\,e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = (-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = 1$$

y, por tanto, la integral converge. La igualdad

$$(-x\,e^{-x})\Big|^{+\infty} = 0$$

debe interpretarse como sigue:

$$\lim_{x\to+\infty}(-x\,e^{-x}) = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0\,,$$

por ejemplo, aplicando la regla de L'Hopital.
Para la segunda parte del ejercicio, es inmediato que la función $f(x) = x\,e^{-x}$ es tanto positiva como continua en $(1,+\infty)$. Además, es decreciente allí ya que $f'(x) = (1-x)\,e^{-x} < 0$ cuando $x > 1$. Luego podemos aplicar el *Test de la integral* para deducir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\,e^{-n}$ converge o diverge simultaneamente con la integral $\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx$, es decir, que es convergente.

97. Compruebe que la serie p-armónica

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,, \qquad p\in\mathbb{R}\,,$$

converge si y sólo si $p > 1$, usando el Criterio de la integral.

SOLUCIÓN. Cuando $p \le 0$, el término general de la serie no tiene a cero y, por tanto, la serie diverge. Por tanto, sólo nos interesa considerar el caso $p > 0$.
Cuando $p > 0$, la función $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ es continua, positiva y decreciente en $[1,+\infty)$ ya que el denominador es una función creciente y el numerador es constante. Por tanto, podemos aplicar el *Criterio de la integral*, que nos dice que la serie en cuestión es convergente si y sólo si converge la integral impropia

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^{M} x^{-p}\,dx = \lim_{M\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{M} = \lim_{M\to\infty}\frac{M^{1-p}-1}{1-p}\,.$$

Este último límite es finito si y sólo si $1-p < 0$, es decir, si $p > 1$.

98. Use el criterio de la integral para decidir si la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$$

es convergente.

Solución. La función
$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{x\ln^2 x}$$
es decreciente en $(2,+\infty)$ ya que el denominador es una función creciente y el numerador es constante. Podemos aplicar entonces el *Criterio de la integral*. Éste nos dice que la serie en cuestión es convergente si y sólo si converge la integral impropia
$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx\,.$$
Para estudiar la convergencia de esta última integral, empezamos reemplazando la integral impropia por el límite correspondiente
$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_2^A \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx\,.$$
A continuación observamos que el cambio de variable $u = \ln x$ convierte la integral indefinida en
$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$
lo cual, volviendo a la integral impropia, nos da
$$\lim_{A\to\infty}\int_2^A \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^A = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A} = \frac{1}{\ln 2} < \infty\,.$$
Puesto que la integral correspondiente converge, la serie también converge.