

Curso Avanzado de Análisis Matemático (2020-21)

Ceros e interpolación de funciones analíticas

OBJETIVOS

Este curso está pensado como una introducción a la teoría elemental de interpolación y a la de algunas colecciones o espacios clásicos de funciones analíticas, con el especial énfasis en los ceros y en la interpolación de las funciones en dichas familias de funciones. Se abordarán, al menos, cuatro o cinco de los seis temas indicados en el programa, posiblemente con algunas permutaciones de orden, adaptando el contenido final al ritmo del curso y a los intereses de los estudiantes y omitiendo algunos temas y profundizando en otros.

Como requisito previo para seguir este curso, es imprescindible haber cursado Fundamentos de Análisis Matemático o unos contenidos equivalentes de Análisis. En todo caso, se repasarán los contenidos necesarios de Variable Compleja II y Análisis Real y Funcional cuando sea necesario.

PROGRAMA ORIENTATIVO DEL CURSO

Se abarcará la selección más amplia posible de entre los siguientes temas:

- **Breve repaso de algunas técnicas de variable compleja.** Fórmula de Jensen, núcleo de Poisson, familias normales, teoremas de Weierstrass y de Hurwitz, automorfismos del disco, productos infinitos.
- **Algunos resultados básicos o clásicos.** Interpolación finita: polinomios de Lagrange. Interpolación de las derivadas; esquema de Hermite. Interpolación infinita (sin restricciones) por funciones enteras; teorema de Guichard. Productos canónicos de Weierstrass; teorema de Weierstrass. Representación de las funciones meromorfas como cocientes de funciones enteras; teorema de Mittag-Leffler.
- **Espacios de Hardy del disco.** Medias integrales. Los espacios de Hardy en el disco. Integral de Poisson-Stieltjes. Clase de Nevanlinna. Existencia de límites radiales y no tangenciales. Las dos formas de ver el espacio de Hardy: en el disco y en la circunferencia. Teorema de los hermanos Riesz. Productos de Blaschke y sucesiones de Blaschke. Ceros de las funciones en espacios de Hardy. La terminología de Beurling y la factorización canónica (de Smirnov) en espacios de Hardy.
- **Funciones analíticas acotadas.** Las métricas hiperbólica y pseudo-hiperbólica en el disco. Interpolación por funciones acotadas por uno y por productos de Blaschke; teoremas de Pick-Nevanlinna y de Carathéodory. Espacio de Bloch. Conjuntos discretos y uniformemente discretos en el disco. Interpolación; teorema de Carleson. Generalizaciones a otros espacios de Hardy (Shapiro-Shields). Fórmula de Jones para la interpolación.
- **Espacios de Bergman.** Núcleo reproductor de Bergman. Proyección de Bergman. Propiedades analíticas de los espacios de Bergman. Ceros de las funciones en espacios de Bergman. Divisores contractivos de ceros. Densidades de Nykvist, conjuntos de

muestreo (*sampling*) e interpolación en espacios de Bergman, teorema de interpolación y muestreo de Seip.

- **Espacios de Hardy del semiplano y funciones enteras.** Espacios de Hardy del semiplano. Teorema de Paley-Wiener. Orden y tipo de una función entera. Teoremas de Nevanlinna. Relación entre el crecimiento y la distribución de ceros de una función entera. Teorema de Phragmen-Lindelöf. Teorema de Plancherel-Polya. Algunos espacios de funciones enteras. Interpolación por funciones enteras de tipo exponencial.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS BÁSICAS

- L.V. Ahlfors: *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- P.L. Duren, A.P. Schuster: *Bergman Spaces*, AMS, 2004.
- J.B. Garnett: *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, 1981.
- P. Koosis: *Introduction to H_p Spaces*, Cambridge University Press, 1998.
- B.Ya. Levin: *Lectures on Entire Functions* (traducción del ruso) AMS, 1996.
- W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- K. Seip: *Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions*, AMS, 2004.
- Otros textos de consulta (apropiados para diversos temas puntuales).
- Varios artículos de investigación (seleccionados para los trabajos de fin de curso).

EVALUACIÓN

Examen (oral y escrito): 60%. Consistirá en la elaboración de un trabajo que se entregará al finalizar las clases y se defenderá en una breve exposición oral, en el horario previsto para el examen final (y también el día siguiente, si fuese necesario y posible). Cada presentación abordará un capítulo de una monografía avanzada o un artículo de investigación, correspondientes a un tema del curso. Los estudiantes tendrán la opción de elegir el tema de una lista que se publicará durante el cuatrimestre. La participación activa en clase podría también tenerse en cuenta para mejorar ligeramente la nota del examen final.

Entregas de ejercicios: 40%. Se facilitarán hasta tres colecciones de ejercicios (divididas en listas parciales más cortas) durante el curso y se pedirá la entrega de algunas soluciones. Para poner en práctica la materia vista en clase, se discutirán algunas soluciones de ejercicios en tutorías o clases y/o se facilitarán las soluciones de algunos ejercicios esenciales.

Profesor: Dragan Vukotić

Despacho: 208, Módulo 08

Tutorías: Flexibles, por acuerdo mutuo previo, por Teams o presenciales