



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

# Mecánica estadística aplicada a la economía

TRABAJO DE FIN DE GRADO  
Grado en Matemáticas

*Autor:* Ana Villajos Contreras

*Tutores:* Daniel Faraco Hurtado  
Ángel Castro Martínez

Curso 2021-2022



## Resumen

Este trabajo de fin de grado contiene una introducción a la mecánica estadística y su aplicación a la economía.

La mecánica estadística es una rama de la física que, apoyándose en teorías estadísticas, deduce el comportamiento macroscópico de un cierto sistema desde sus propiedades microscópicas.

Nos basaremos en el estudio de científicos como James Clerk Maxwell y Ludwig Eduard Boltzmann que consiguieron encontrar una distribución de la energía de un conjunto de partículas desde dos puntos de vista diferentes.

La idea de Boltzmann es más fuerte que la de Maxwell, ya que considera un espacio general y por lo tanto se podrá aplicar tanto a gases, coincidiendo así con la distribución de Maxwell de la energía, como a la economía.

Este enfoque hacia la economía es en lo que nos centraremos en la segunda parte del trabajo. Siguiendo la idea de Boltzmann, llegaremos a que, sujetos a unas condiciones, la distribución del dinero tendrá una solución estacionaria que será la distribución de Boltzmann. Además, veremos de forma experimental que se cumple este resultado en distintas condiciones. Por último, estudiaremos un ejemplo que no converge a la solución estacionaria de Boltzmann.

## Abstract

This graduate thesis contains an introduction to statistical mechanics and its application to economics.

Statistical mechanics is a branch of physics that, supported by statistical theories, deduces the macroscopic behavior of a given system from its microscopic properties.

We will draw on the study of scientists like James Clerk Maxwell and Ludwig Eduard Boltzmann who managed to find a distribution of the energy of a set of particles from two different points of view.

Boltzmann's idea is stronger than Maxwell's, since it considers a general space and therefore can be applied both to gases, thus coinciding with Maxwell's distribution of energy, and to economics.

This approach to economics is what we will focus on in the second part of the thesis. Following Boltzmann's idea, we will come to the conclusion that, subject to certain conditions, the distribution of money will have a stationary solution, which will be the distribution of Boltzmann. In addition, we will see experimentally that this result is achieved under different conditions. Finally, we will study an example that does not converge to Boltzmann's stationary solution.



# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Distribución de Maxwell</b>	<b>3</b>
2.1	Introducción e hipótesis . . . . .	3
2.2	Problema . . . . .	3
2.3	Cálculo de $A$ . . . . .	6
2.4	Cálculo de $\beta$ . . . . .	8
2.5	Velocidad media y velocidad cuadrática media . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Distribución de Boltzmann</b>	<b>11</b>
3.1	Introducción e hipótesis . . . . .	11
3.2	Microestados y macroestados . . . . .	11
3.3	Entropía . . . . .	13
3.4	Fórmula de Stirling . . . . .	15
3.5	Ley de distribución de Boltzmann . . . . .	16
<b>4</b>	<b>La econofísica</b>	<b>19</b>
4.1	Introducción . . . . .	19
4.2	Distribución del dinero . . . . .	19
4.3	Simulaciones informáticas . . . . .	21
4.3.1	Modelo simple . . . . .	21
4.3.2	Modelo con diferente cantidad inicial . . . . .	23
4.3.3	Modelo con cantidad de transacción aleatoria y cantidad inicial aleatoria . . . . .	23
4.3.4	Modelo de firmas . . . . .	25
4.3.5	Modelo con deuda . . . . .	27
4.4	Condiciones para no cumplir la distribución de Boltzmann . . . . .	29
	<b>Bibliografía</b>	<b>33</b>



# CAPÍTULO 1

## Introducción

---

La mecánica estadística es una rama de la física basada en un modelo molecular al cual le aplica las leyes de la mecánica y esto permite explicar las propiedades macroscópicas de la materia.

Las hipótesis fundamentales del modelo molecular que consideramos son:

- Cualquier volumen finito de un gas, por pequeño que lo consideremos, consta de un gran número de partículas iguales. Esto nos permite aplicar métodos estadísticos.
- El diámetro de una molécula/ partícula, considerada esférica, es muy pequeño y despreciable.
- Las moléculas están en movimiento.
- Los choques de las moléculas se realizan sin pérdida de la energía.

Históricamente, la mecánica estadística de los gases fue desarrollada durante la segunda mitad del siglo XIX por Maxwell y ampliada por Boltzmann entre otros científicos como Clausius y Gibbs. Estos físicos creían en la existencia de los átomos y el desarrollo de métodos matemáticos para describir sus propiedades estadísticas.

Maxwell dió un paso decisivo al conseguir la distribución de probabilidad de las velocidades de las moléculas en un gas. Esta aproximación continuó desarrollándose por Boltzmann, el cual fue muy explícito en cuanto a sus orígenes. Boltzmann dijo: “Las moléculas son como individuos, ... y las propiedades de los gases sólo permanecen inalteradas, porque el número de estas moléculas, que por término medio tienen un estado determinado, es constante”.

En este trabajo estudiaremos este recorrido de la mecánica estadística empezando por Maxwell y llegando a Boltzmann donde conseguiremos aplicar su idea a cuestiones de economía ya que parafraseándole: “Esto abre una perspectiva amplia, si no sólo pensamos en objetos mecánicos. Consideremos aplicar este método a las estadísticas de los seres vivos, la sociedad, la sociología y demás”.





## CAPÍTULO 2

# Distribución de Maxwell

---

### 2.1. Introducción e hipótesis

En toda masa gaseosa en cualquier instante y debido a los choques de partículas, existen moléculas con distintas velocidades, aunque la gran mayoría tendrán velocidades muy próximas a un valor medio. Así Maxwell determinó una ley de distribución de velocidades que nos permite conocer en un estado estacionario, que no cambia con el tiempo, cuántas moléculas poseen una velocidad determinada. Para deducir esta ley se hacen las siguientes hipótesis:

1. El gas se encuentra a temperatura constante, no hay intercambios con el exterior.
2. La densidad media del gas permanece constante en todo el recinto.
3. En los distintos elementos de volumen que constituyen el volumen total del gas, si no se eligen infinitamente pequeños, la distribución de las velocidades no difiere de unos a otros y no varía en el tiempo.
4. Las funciones de distribución de las componentes de las velocidades  $v_x, v_y, v_z$  son idénticas en forma. Además, la distribución total sólo depende del módulo de la velocidad y no de su dirección. Esta hipótesis se llama **isotropía de la distribución de velocidades**.
5. La probabilidad de que la componente  $v_x$  de la velocidad tenga un determinado valor es independiente de los valores que toman las componentes  $v_y$  o  $v_z$ .

### 2.2. Problema

Consideramos un campo de velocidades. Por estas hipótesis vamos a considerar las componentes de la velocidad  $V_x, V_y, V_z$ . Éstas son variables aleatorias continuas independientes e idénticamente distribuidas por las hipótesis 4 y 5 y son continuas porque la probabilidad de que tome un valor concreto es prácticamente nula.

En 1859, Maxwell determinó la *Ley de distribución de las velocidades* que nos permite saber cuántas moléculas de un gas poseen una velocidad determinada. Esto constituye precisamente nuestro problema.

Definiciones previas:

1.  $N$  es el número total de partículas en el recinto.
2.  $N(v_x)$  es la probabilidad de que una molécula tenga velocidad entre  $-\infty$  y  $v_x$ , es decir el número de moléculas con velocidades entre  $-\infty$  y  $v_x$  dividido entre  $N$ . Esta será nuestra función de probabilidad acumulada de la velocidad  $V_x$ , igual para  $V_y$  y  $V_z$ .
3.  $\frac{dN(v_x)}{dv_x}$  es la función de densidad de la variable  $V_x$  que denotaremos por  $f(v_x)$ . Precisamente lo que queremos obtener.

### Cálculo:

A la función de probabilidad conjunta la vamos a llamar función de densidad de los puntos en el espacio de velocidades. Además al ser  $V_x, V_y, V_z$  variables aleatorias independientes, esta función de densidad se calcula como:

$$(2.1) \quad \rho(v_x, v_y, v_z) = f(v_x)f(v_y)f(v_z)$$

y por supuesto, como toda función de densidad, se cumplirá:

$$\int \int \int f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_xdv_ydv_z = 1$$

en donde las integrales se extienden para todos los valores de  $v_x, v_y, v_z$  desde  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Por la hipótesis 4 la densidad no debería depender de la dirección de la velocidad, únicamente de su módulo, por lo tanto

$$\rho(v_x, v_y, v_z) = g(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

para alguna función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tomando las derivadas parciales con respecto a  $v_x, v_y, v_z$  tenemos

$$g'(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)2v_x = f'(v_x)f(v_y)f(v_z)$$

$$g'(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)2v_y = f(v_x)f'(v_y)f(v_z)$$

$$g'(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)2v_z = f(v_x)f(v_y)f'(v_z)$$

despejando  $g'(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$  de las tres ecuaciones e igualándolas obtenemos

$$(2.2) \quad \frac{f'(v_x)f(v_y)f(v_z)}{2v_x} = \frac{f(v_x)f'(v_y)f(v_z)}{2v_y} = \frac{f(v_x)f(v_y)f'(v_z)}{2v_z}$$

y dividiendo (2.2) entre  $\rho(v_x, v_y, v_z) = f(v_x)f(v_y)f(v_z)$

$$\frac{\frac{f'(v_x)}{v_x}}{f(v_x)} = \frac{\frac{f'(v_y)}{v_y}}{f(v_y)} = \frac{\frac{f'(v_z)}{v_z}}{f(v_z)}$$

Como tenemos una igualdad de funciones que dependen de distintas variables  $v_x, v_y, v_z$  entonces, debe ser igual a una constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  por lo tanto

$$\frac{\frac{f'(v_x)}{v_x}}{f(v_x)} = \lambda$$

y resolviendo las ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de separación de variables

$$\frac{f'(v_x)}{f(v_x)} = \lambda v_x \rightarrow \int \frac{f'(v_x)}{f(v_x)} = \int \lambda v_x \rightarrow \ln(f(v_x)) = \lambda \frac{v_x^2}{2} + C$$

$$(2.3) \quad f(v_x) = Ae^{\lambda \frac{v_x^2}{2}}; \quad f(v_y) = Ae^{\lambda \frac{v_y^2}{2}}; \quad f(v_z) = Ae^{\lambda \frac{v_z^2}{2}}$$

Donde A es constante y es la misma para todas por 4. El valor  $\lambda$  debe ser negativo para tener convergencia y que  $N(v_x)$  sea finito. Por lo tanto sustuiremos  $\lambda$  por  $-2\beta^2$ .

$$(2.4) \quad \begin{aligned} f(v_x) &= Ae^{-\beta^2 v_x^2}; \\ f(v_y) &= Ae^{-\beta^2 v_y^2}; \\ f(v_z) &= Ae^{-\beta^2 v_z^2} \end{aligned}$$

Recordamos que la distribución gaussiana es simétrica y  $\mathbb{E}(V_x) = 0$ . De manera más intuitiva, la velocidad más probable es 0 ya que la velocidad de una molécula puede ser con la misma probabilidad positiva o negativa. Dando valores a A y  $\beta$  las ecuaciones anteriores describen *la distribución de las componentes  $v_x, v_y, v_z$  por separado*.

Recordando que  $v$  es el módulo de la velocidad observamos que la función densidad es

$$(2.5) \quad \rho(v_x, v_y, v_z) = f(v_x)f(v_y)f(v_z) = Ae^{-\beta^2 v_x^2} Ae^{-\beta^2 v_y^2} Ae^{-\beta^2 v_z^2} = A^3 e^{-\beta^2 v^2}$$

que da lugar a la *distribución vectorial de Maxwell*. Finalmente nótese que A debe ser positivo ya que la densidad de partículas nunca puede ser negativa.

### 2.3. Cálculo de A

Sabemos que por ser función de probabilidad

$$(2.6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\beta^2 v_x^2} dv_x = 1$$

A lo largo del texto van a ser importantes integrales del tipo

$$(2.7) \quad I(h) = \int_0^{\infty} v^h e^{-\beta^2 v^2} dv$$

Es la llamada *integral de la teoría cinética o integral de Laplace*.

Cuando  $h$  es par es decir  $h = 2m$ :

$$(2.8) \quad I(h) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2^{m+1} \beta^{2m+1}} \sqrt{\pi}$$

y para  $h$  impar es decir  $h = 2m + 1$ :

$$(2.9) \quad I(h) = \frac{m!}{2 \beta^{2m+2}}$$

*Demostración.* Para resolver esta integral empezaremos resolviendo la llamada transformada de Laplace.

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \rightarrow J^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Hacemos un cambio a coordenadas polares con límite de 0 a  $\pi/2$  ya que la  $x$  y la  $y$  son positivas, es decir, están en el primer cuadrante

$$J^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (e^{-r^2})_0^{\infty} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Añadiendo al exponente  $\beta^2$ , como es una constante, el cálculo es similar y llegaría a

$$(2.10) \quad J^2 = \frac{\pi}{4\beta^2} \rightarrow J = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta}$$

Volviendo a nuestra integral

$$I(h) = \int_0^{\infty} v^h e^{-\beta^2 v^2} dv$$

y dividiremos para el caso par y el caso impar.

**Caso h par:**  $h = 2m$  vamos a aplicar integración por partes hasta  $m$  veces

$$\begin{aligned}
 I(2m) &= \int_0^\infty v^{2m} e^{-\beta^2 v^2} dv = \left[ \begin{array}{l} u = v^{2m-1} \quad du = (2m-1)v^{2m-2} dv \\ w = \frac{-e^{-\beta^2 v^2}}{2\beta^2} \quad dv = ve^{-\beta^2 v^2} dv \end{array} \right] = \\
 &= \left( \frac{-v^{2m-1} e^{-\beta^2 v^2}}{2\beta^2} \right)_0^\infty + \frac{2m-1}{2\beta^2} \int_0^\infty v^{2m-2} e^{-\beta^2 v^2} dv = \\
 &= \left[ \begin{array}{l} u = v^{2m-3} \quad du = (2m-3)v^{2m-4} dv \\ w = \frac{-e^{-\beta^2 v^2}}{2\beta^2} \quad dv = ve^{-\beta^2 v^2} dv \end{array} \right] = \\
 &= \frac{(2m-1)(2m-3)}{2^2 \beta^4} \int_0^\infty v^{2m-4} e^{-\beta^2 v^2} dv = \dots = \\
 &= \frac{(2m-1) \cdot (2m-3) \dots 3 \cdot 1}{2^m \beta^{2m}} \int_0^\infty e^{-\beta^2 v^2} dv.
 \end{aligned}$$

Usando (2.10) queda que

$$I(2m) = \frac{(2m-1) \cdot (2m-3) \dots 3 \cdot 1}{2^{m+1} \beta^{2m+1}} \sqrt{\pi}.$$

**Caso h impar:**  $h = 2m + 1$  vamos a aplicar integración por partes hasta  $m$  veces

$$\begin{aligned}
 I(2m+1) &= \int_0^\infty v^{2m+1} e^{-\beta^2 v^2} dv = \left[ \begin{array}{l} u = v^{2m} \quad du = (2m)v^{2m-1} dv \\ w = \frac{-e^{-\beta^2 v^2}}{2\beta^2} \quad dv = ve^{-\beta^2 v^2} dv \end{array} \right] = \\
 &= \left( \frac{-v^{2m} e^{-\beta^2 v^2}}{2\beta^2} \right)_0^\infty + \frac{2m}{2\beta^2} \int_0^\infty v^{2m-1} e^{-\beta^2 v^2} dv = \\
 &= \left[ \begin{array}{l} u = v^{2m-2} \quad du = (2m-2)v^{2m-3} dv \\ w = \frac{-e^{-\beta^2 v^2}}{2\beta^2} \quad dv = ve^{-\beta^2 v^2} dv \end{array} \right] = \\
 &= \frac{(2m)(2m-2)}{2^2 \beta^4} \int_0^\infty v^{2m-3} e^{-\beta^2 v^2} dv = \dots = \\
 &= \frac{(2m) \cdot (2m-2) \dots 4 \cdot 2}{2^m \beta^{2m}} \int_0^\infty ve^{-\beta^2 v^2} dv.
 \end{aligned}$$

Usando (2.10) queda que

$$I(2m) = \frac{(2m) \cdot (2m-2) \dots 4 \cdot 2}{2^{m+1} \beta^{2m+2}} \left( e^{-\beta^2 v^2} \right)_0^\infty = \frac{m!}{2\beta^{2m+2}}.$$

□

Por lo tanto, volviendo a nuestra integral (2.6), los límites son  $-\infty$  y  $+\infty$ . Entonces, si  $h$  es par, el resultado es igual al doble del valor de la integral de Laplace

ya que si es impar el resultado es 0 por ser producto de una función par por otra impar.

En nuestra integral (2.6) evaluamos  $h=0$  y entonces

$$(2.11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\beta^2 v_x^2} dv_x = 1 = 2AI(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A v^0 e^{-\beta^2 v^2} dv = 2A \frac{1}{2\beta} \sqrt{\pi}$$

Por lo tanto tenemos que

$$A \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} = 1 \longrightarrow A = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}.$$

Ya que  $\rho$  sólo depende del módulo de la velocidad. Llamamos  $M(v) = \rho(v_x, v_y, v_z)$

$$(2.12) \quad M(v) = \frac{\beta^3}{\pi^{3/2}} e^{-\beta^2 v^2}$$

Sea  $F(v)$  una función real medible, la esperanza será:

$$E(F(v)) = \int_{\mathbb{R}^3} F(v) M(v) dv_x dv_y dv_z$$

Haremos un cambio de variables a coordenadas esféricas. Recordamos:

Sea  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación definida por  $g(v, \phi, \theta) = (v \sin \phi \cos \theta, v \sin \phi \sin \theta, v \cos \phi)$  que, restringiéndolo al abierto  $U = \{(v, \phi, \theta) : v > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi\}$ ,  $g$  es inyectiva y su jacobiano es  $Jg(v, \phi, \theta) = v^2 \sin \phi > 0$  en  $U$  tenemos que

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(v) M(v) v^2 \sin \phi dv d\phi d\theta = \int_0^\infty F(v) M(v) 4\pi v^2 dv$$

Así observamos que la función de distribución total de la velocidad  $v$  es

$$(2.13) \quad \bar{M}(v) = M(v) 4\pi v^2 \quad \rightarrow \quad \bar{M}(v) = \left( \frac{4\beta^3 v^2}{\sqrt{\pi}} \right) e^{-\beta^2 v^2}$$

donde  $\bar{M}(v)$  es la *función de distribución escalar de la velocidad de Maxwell*.

## 2.4. Cálculo de $\beta$

Vamos a escribir  $\beta$  en función de propiedades del gas. Para ello necesitamos previamente una definición.

**Definición 2.1.** *la velocidad más probable,  $v_p$ :* es aquella que corresponde a la velocidad con mayor densidad de probabilidad.

Para calcularla simplemente tenemos que encontrar el máximo de la función de distribución escalar de Maxwell:

$$(2.14) \quad \frac{d}{dv} \left[ \frac{4\beta^3 v^2 e^{-\beta^2 v^2}}{\sqrt{\pi}} \right] = 0 \longrightarrow v_p = \frac{1}{\beta}$$

Observamos que  $\beta$  es la inversa de la velocidad más probable. En esta distribución ya no hay simetría alrededor del valor más probable. Esta distribución se llama *maxwelliana*.

## 2.5. Velocidad media y velocidad cuadrática media

**Definición 2.2.** La *velocidad media*  $\bar{v}$  o la esperanza de  $V$  es

$$(2.15) \quad \bar{v} = \int_0^{\infty} v \bar{M}(v) dv,$$

que sustituyendo por el valor de la función de probabilidad de la ecuación (2.13)

$$(2.16) \quad \bar{v} = \frac{4\beta^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\beta^2 v^2} dv.$$

Fijándonos en la integral de Laplace  $I(3) = \frac{1}{2\beta^4}$  entonces

$$\bar{v} = \frac{2}{\beta\sqrt{\pi}} = 1,128v_p.$$

**Definición 2.3.** El *valor medio de los cuadrados de las velocidades* o segundo momento de  $V$  se define como

$$(2.17) \quad \overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 \bar{M}(v) dv \longrightarrow \overline{v^2} = \frac{4\beta^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\beta^2 v^2} dv.$$

Fijándonos ahora en la integral de Laplace  $I(4) = \frac{3}{8\beta^5} \sqrt{\pi}$  entonces

$$\overline{v^2} = \frac{4\beta^3 3\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} 8\beta^5} = \frac{3}{2\beta^2} = \frac{3}{2} v_p^2$$

y por lo tanto la *velocidad cuadrática media*  $v_{rcm}$  será:

$$v_{rcm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_p.$$

Por cuestiones físicas más avanzadas, se puede entender que  $p = \frac{1}{3}mN\overline{v^2}$ , donde  $p$  es presión del gas y  $m$  la masa, que comparado con la ecuación de los gases ideales  $pV = NRT$ , donde  $V$  es el volumen del gas,  $R$  una constante y  $T$  la temperatura, tenemos:

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}.$$

Entonces deducimos que

$$v_p^2 = \frac{2}{3}\overline{v^2} = \frac{2kT}{m} \quad \text{y} \quad \overline{v^2} = \frac{4}{\pi}v_p^2 = \frac{8kT}{\pi m}.$$

Así obtenemos:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad v_{rcm} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Por lo tanto, sustituyendo por el valor de  $\beta = 1/v_p$  en la ecuación (2.13)

$$(2.18) \quad \overline{M}(v) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Esta es la *función de la velocidad escalar de Maxwell en función de la temperatura*.

Por último, veremos la *función de la velocidad vectorial de Maxwell en función de la temperatura*. Sustituyendo en la distribución (2.12):

$$\beta = \frac{1}{v_p} = \sqrt{\frac{m}{3kT}},$$

$$(2.19) \quad M(v) = \left( \frac{m}{2kT\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$



## CAPÍTULO 3

# Distribución de Boltzmann

---

### 3.1. Introducción e hipótesis

La mecánica estadística es el estudio de las propiedades macroscópicas de un gas en función de las partículas. Nos centraremos en la mecánica estadística clásica, que asume que la energía de las partículas puede tomar cualquier valor, es decir, la energía de la partícula es una variable aleatoria continua que es independiente de la energía del resto dos a dos. Además, los intercambios energéticos entre dos partículas se producen mediante los choques de estas.

Consideraremos un gas que es un sistema con  $N$  partículas y un volumen fijo, este sistema no puede intercambiar masa ni energía con su exterior. Para conocer el verdadero comportamiento del gas necesitaríamos saber las posiciones  $(x, y, z)$  y las velocidades  $(v_x, v_y, v_z)$  de las  $N$  partículas, aunque esto en la práctica es imposible. Consideraremos un espacio de seis dimensiones correspondiendo a las seis coordenadas anteriores y dividiremos este espacio en  $n$  celdas que son subconjuntos del sistema de igual volumen  $V$ , por el momento asumimos que  $|v_x|, |v_y|, |v_z| \leq M$ . La densidad de cada una de estas celdas será  $\rho = \frac{N_i}{V}$ , donde  $N_i$  es el número de moléculas en la celda  $i$ -ésima. Y asumiremos también que la energía total del sistema y el número de partículas son constantes.

$$E = \sum_i E_i N_i \quad N = \sum_i N_i$$

Donde  $E_i$  es la energía de la celda  $i$ .

### 3.2. Microestados y macroestados

Para hacer más fácil la explicación de esta sección empezaremos con un ejemplo.

Supongamos que tenemos  $N=4$  partículas distinguibles,  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , y  $n=2$  celdas distinguibles,  $c_1, c_2$ . A cada una de las combinaciones de las partículas en las celdas la llamaremos configuración. En nuestro caso, las posibles configuraciones serían:

Celda	$W_1$	$W_2$			
$c_1$	$p_1 p_2 p_3 p_4$	$p_1 p_2 p_3$	$p_1 p_2 p_4$	$p_1 p_3 p_4$	$p_2 p_3 p_4$
$c_2$		$p_4$	$p_3$	$p_2$	$p_1$

Celdas	$W_3$					
$c_1$	$p_1 p_2$	$p_1 p_3$	$p_1 p_4$	$p_2 p_3$	$p_2 p_4$	$p_3 p_4$
$c_2$	$p_3 p_4$	$p_2 p_4$	$p_3 p_2$	$p_1 p_4$	$p_1 p_3$	$p_1 p_2$

Celdas	$W_4$				$W_5$
$c_1$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	
$c_2$	$p_2 p_3 p_4$	$p_1 p_3 p_4$	$p_1 p_2 p_4$	$p_1 p_2 p_3$	$p_1 p_2 p_3 p_4$

1.  $W_1 = 1$  que corresponde a las combinaciones donde hay 4 partículas en la celda  $c_1$  y 0 en  $c_2$ .
2.  $W_2 = 4$  que corresponde a las combinaciones donde hay 3 partículas en la celda  $c_1$  y 1 en  $c_2$ .
3.  $W_3 = 6$  que corresponde a las combinaciones donde hay 2 partículas en la celda  $c_1$  y 2 en  $c_2$ .
4.  $W_4 = 4$  que corresponde a las combinaciones donde hay 1 partícula en la celda  $c_1$  y 3 en  $c_2$ .
5.  $W_5 = 1$  que corresponde a las combinaciones donde hay 0 partículas en la celda  $c_1$  y 4 en  $c_2$ .

Esto da un total de 16 configuraciones posibles. Esta forma es hacerlo *a lo bruto*, podríamos hacer uso de combinatoria. En este caso, donde hay dos celdas, nos podría servir con el número combinatorio, donde podemos elegir el número de partículas que irían a la celda  $c_1$ , que son  $N_1$ , y el resto irían a las celdas  $c_2$

$$W_i = \binom{N}{N_1}$$

Con este ejemplo, definimos *microestado* como cada una de las configuraciones posibles y *macroestado* como aquellas configuraciones donde las partículas son indistinguibles, es decir, la clase de configuraciones que tienen el mismo número de partículas en cada celda, y por tanto tienen las mismas propiedades macroscópicas. Es decir, cada una de las  $W_i$  es un macroestado. En el ejemplo anterior hay 5 macroestados.

En el caso general cuando tenemos  $N$  partículas y  $n$  celdas arbitrarias, el número de microestados donde hay  $N_i$  partículas en la celda  $i$  se obtiene haciendo uso de los coeficientes multinómicos que nos indica el número de combinaciones que hay. Véase [3].

$$W(N_1, \dots, N_n) = \binom{N}{N_1, \dots, N_n} = \frac{N!}{N_1! \dots N_n!}$$

y estas configuraciones corresponderían al mismo macroestado  $W$ . Como no hay restricciones, más allá de que  $N$  permanezca constante, las partículas pueden estar en cualquier celda y por lo tanto el número total de configuraciones o microestados será  $n^N$ .

En el caso anterior, no considerábamos la restricción de la energía que tenemos en nuestro problema, ahora veremos qué ocurre si consideramos que  $E = \sum_{i=1}^n E_i N_i$ . Pongamos primero un ejemplo:

Supongamos que tenemos  $N=3$  partículas llamadas a, b y c y  $n=4$  celdas que deben cumplir que  $\sum_{i=1}^4 E_i N_i = 9\epsilon$ ,  $\epsilon$  es la unidad de energía, donde  $E_4 = 4\epsilon$ ,  $E_3 = 3\epsilon$ ,  $E_2 = 2\epsilon$  y  $E_1 = 1\epsilon$ . En este caso las posibles combinaciones son

Celda	Macroestados									
	$W_1$	$W_2$						$W_3$		
4		a	a	b	b	c	c	ab	bc	ac.
3	abc	b	c	a	c	a	b			
2		c	b	c	a	b	a			
1								c	a	b

Donde cada columna corresponde a una configuración, microestado, diferente. Por ejemplo, la tercera columna corresponde a la configuración donde la partícula a está en la celda 4, la b en la 3 y la c en la 2. Como en el ejemplo de antes, las posibles configuraciones vienen dadas por:

$$W_1 = \frac{3!}{0!3!0!0!} = 1 \quad W_2 = \frac{3!}{1!1!1!0!} = 6 \quad W_3 = \frac{3!}{2!0!0!1!} = 3,$$

que son las únicas que cumplen la condición de la energía ya que

$$W_1 : 3 \cdot 3\epsilon = 9\epsilon \quad W_2 : 4\epsilon + 3\epsilon + 2\epsilon = 9\epsilon \quad W_3 : 2 \cdot 4\epsilon + 1\epsilon = 9\epsilon$$

por lo tanto, sólo hay 10 microestados que cumplan esta condición. Observamos que el cálculo de los microestados de un mismo macroestado se hace igual pero ahora, no todos los macroestados, y por ende microestados, son posibles ya que no todos cumplen la condición de la energía. Por ejemplo, si cogemos la configuración donde las tres partículas están en la celda 4, la energía sería  $3 \cdot 4\epsilon = 12\epsilon \neq 9\epsilon$ .

Ahora el número total de macroestados será la suma de los macroestados posibles, en nuestro ejemplo sería 3.

### 3.3. Entropía

La entropía ( $S$ ) es una variable termodinámica asociada al desorden de un sistema entendiéndose como desorden lo que expresa la siguiente proposición.

**Lema 3.1.** *de Boltzmann* Supongamos que  $S$  es una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sólo depende del número de microestados, es decir,  $S = f(W)$  y que satisface que la entropía de la unión de sistemas, es la suma de las entropías de cada sistema. Es decir, si tengo un sistema y lo divido en dos subsistemas se cumple que  $S = f(W) = S_1 + S_2 = f(W_1) + f(W_2)$  donde  $S$  es la entropía del sistema general,  $S_1, S_2$  las entropías de los subsistemas,  $W$  el número de microestados del sistema general y  $W_1, W_2$  el número de microestados en cada subsistema. Entonces, con estas hipótesis, se cumple que  $S = k \ln W$ , donde  $k$  es una constante.

*Demostración.* Dividimos el sistema en dos subsistemas, según las hipótesis  $S = f(W) = S_1 + S_2 = f(W_1) + f(W_2)$ , además sabemos que  $W = W_1 W_2$  ya que el número total de microestados serán todas las posibles combinaciones entre los microestados de ambos subsistemas y así obtenemos que

$$f(W) = f(W_1 W_2) = f(W_1) + f(W_2)$$

Haciendo las derivadas parciales respecto de  $W_1$  y  $W_2$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{df(W)}{dW_1} &= \frac{df(W)}{dW} \frac{dW}{dW_1} = \frac{df(W)}{dW} W_2 = \frac{df(W_1)}{dW_1} \\ \frac{df(W)}{dW_2} &= \frac{df(W)}{dW} \frac{dW}{dW_2} = \frac{df(W)}{dW} W_1 = \frac{df(W_2)}{dW_2} \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\frac{df(W)}{dW} = \frac{1}{W_2} \frac{df(W_1)}{dW_1} = \frac{1}{W_1} \frac{df(W_2)}{dW_2} \rightarrow W_1 \frac{df(W_1)}{dW_1} = W_2 \frac{df(W_2)}{dW_2} = k$$

donde  $k$  es una constante. Resolviendo las ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de separación de variables

$$W_1 \frac{df(W_1)}{dW_1} = k \rightarrow \int df(W_1) = \int \frac{k dW_1}{W_1} \rightarrow f(W_1) = k \ln W_1 + A$$

Análogamente para  $f(W_2)$  obtenemos

$$f(W_2) = k \ln W_2 + A$$

Siendo  $S$  una entropía, también se cumple que:

$$S = k \ln W + A$$

Sabemos por hipótesis que

$$S = S_1 + S_2 = k \ln W_1 + A + k \ln W_2 + A = k \ln W + A$$

por lo tanto  $A = 0$  y así  $S = k \ln W$ . A esto se le llama *ecuación de Boltzmann*.  $\square$

Observamos que el número de microestados máximo corresponde a la entropía máxima.

Como hemos dicho al principio de la sección, la entropía se define como una medida del desorden, cuanto más desordenado está un sistema mayor es su entropía. Podemos observar que, el sistema tiende a adoptar el estado que tiene más microestados, ésta es una manera informal de introducir *la segunda ley de la termodinámica*. En la sección 3.5 lo veremos de manera más rigurosa.

### 3.4. Fórmula de Stirling

En las secciones anteriores hemos hecho uso de los números combinatorios, un resultado notable de estos es la fórmula de Stirling.

Para la siguiente sección tendremos que utilizar la fórmula de Stirling por tanto la probaremos.

**Lema 3.2.**  $\ln a! \approx a \ln a - a$  para  $a \gg 1$

*Demostración.*

$$\ln a! = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln a = \sum_{i=1}^a \ln i.$$

Tomando el límite cuando  $a$  tiende a  $\infty$ , para  $a$  grande, el sumatorio se puede comparar con la integral de Riemann. Por lo que llegamos a la siguiente fórmula aproximada:

$$\ln a! \approx \int_1^a \ln i \, di$$

Aplicando integración por partes

$$u = \ln i \rightarrow du = \frac{1}{i} di,$$

$$v = i \rightarrow dv = di,$$

$$\int_1^a \ln i \, di = a \ln a - a + 1.$$

Para valores grandes de  $a$ , 1 puede despreciarse. Y por lo tanto resulta:

$$\ln a! \approx a \ln a - a.$$

□

### 3.5. Ley de distribución de Boltzmann

Boltzmann define el *equilibrio estadístico* como aquel estado cuyo número de micro-estados es máximo. Ahora buscaremos ese estado máximo. Consideramos un sistema formado por  $N$  partículas en equilibrio térmico a temperatura  $T$ , utilizando la fórmula de Stirling  $\ln N! \approx N \ln N - N$  (a partir de ahora, por claridad de la exposición, vamos a considerar que tuviéramos igualdad en la fórmula de Stirling) y aplicando logaritmos, ya que son funciones monótonas, en la fórmula de  $W$  tenemos:

$$\begin{aligned} \ln W &= \ln N! - \sum_i^n \ln N_i! = N \ln N - N - \sum_i^n N_i \ln N_i + \sum_i^n N_i \\ &= N \ln N - \sum_i^n N_i \ln N_i = f(N_1, \dots, N_n) \end{aligned}$$

queremos maximizar esta función la cual recordamos que está sujeta a dos restricciones: que la cantidad de partículas y la energía total son constantes, es decir,

$$g(N_1, \dots, N_n) = \sum_i^n N_i = N = \text{constante} \quad h(N_1, \dots, N_n) = \sum_i^n E_i N_i = U = \text{constante}$$

Para resolver el sistema de optimización con restricciones vamos a utilizar los multiplicadores de Lagrange [6], llamaremos  $\lambda$  y  $\beta$  a los multiplicadores de Lagrange.

En general, la teoría de los multiplicadores de Lagrange para optimizar  $f$  restringido a  $g$  y  $h$  nos dice que:

$$\nabla f(N_1, \dots, N_n) = \lambda \nabla g(N_1, \dots, N_n) + \beta \nabla h(N_1, \dots, N_n)$$

Remplazando los valores de  $f, g, h$  en nuestro caso, ocurre que  $\forall i \in 1, \dots, n$

$$-\ln N_i - 1 = \lambda + \beta E_i$$

Despejando las  $N_i$  obtenemos que

$$N_i = \frac{1}{e^{\lambda + \beta E_i + 1}}$$

Donde los parámetros  $\lambda$  y  $\beta$  aún están por determinar.

Denotando  $e^{-\lambda-1} = A$ , obtenemos  $N_i = A e^{-\beta E_i}$

Usando la restricción  $g(N_1, \dots, N_n) = N$  deducimos que  $N = A \sum_i^n e^{-\beta E_i}$  y nombrando  $Z = \sum_i^n e^{-\beta E_i}$  entonces  $A = N/Z$ . Por tanto,

$$N_i = \frac{N}{Z} e^{-\beta E_i}$$

Para conseguir la distribución normalizada más probable de las partículas deberemos dividir entre  $N$  quedando así

$$(3.1) \quad N_i/N = (1/Z) e^{-\beta E_i}$$

que es la llamada *distribución de Boltzmann* que sirve para saber la probabilidad de que una partícula pertenezca a la celda  $i$ .

A continuación, aplicaremos la idea de Boltzmann a un gas ideal. Para esto, consideraremos como espacio el de las velocidades  $v_x, v_y, v_z$  y lo discretizaremos dividiéndolo en celdas. Ahora la energía  $E_i$  de la celda  $i$  será la energía cinética del centro de la celda, es decir,  $\frac{1}{2}m(v_x^2(i) + v_y^2(i) + v_z^2(i))$ , donde  $m$  es la masa de la molécula. En este caso, la distribución de Boltzmann expresará la probabilidad de que cogiendo una partícula ésta pertenezca a la celda  $i$ -ésima.

Esto nos da

$$\frac{N_i}{N} = A e^{-(m/2)\beta(v_x^2(i)+v_y^2(i)+v_z^2(i))} = A e^{-(m/2)\beta v^2(i)}$$

donde  $A$  es una constante. Por lo tanto, la densidad de la celda, que llamamos  $\rho(v(i))$ , es decir, la proporción de partículas por unidad de volumen  $V$  de la celda, será:

$$\rho(v(i)) = \frac{N_i}{NV} = A' e^{-(m/2)\beta v^2(i)}$$

donde  $A' = A/V$  una constante. Comparando este resultado con la fórmula de la velocidad vectorial de Maxwell en función de la temperatura (2.19)

$$M(v) = \left(\frac{m}{2kT\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

y reescalando la temperatura a  $T' = 2kT/m$  observamos que la fórmula de  $M$  coincide con la de  $\rho$  cuando  $\beta = 1/T'$ . Sustituyendo en  $\rho(v(i))$ , quedaría:

$$\rho(v(i)) = A' e^{-E_i/T'}$$

Donde  $E_i = mv^2/2$ . Ésta es la llamada *distribución de Boltzmann* asociado a un gas ideal. En el capítulo siguiente lo asociaremos a un concepto totalmente distinto, la econofísica.





# CAPÍTULO 4

## La econofísica

---

### 4.1. Introducción

La econofísica es una nueva área de investigación en el que se aplican métodos de física estadística a la economía y finanzas.

La econofísica utiliza métodos matemáticos desarrollados en física estadística para estudiar propiedades complejas de sistemas económicos que utilizan un gran número de personas.

A la mitad de 1990 la econofísica se centró en el análisis de los mercados financieros. Más tarde tomó otra dirección, el estudio de las distribuciones de probabilidad del dinero, la riqueza y los ingresos en la sociedad y que se sobrepone con un extenso estudio sobre la desigualdad en la sociedad. En este trabajo nos centraremos en la distribución de probabilidad del dinero.

Inspirado en la teoría cinética de las colisiones de los gases de Boltzmann, la econofísica introdujo una aproximación alternativa donde los agentes hacen transacciones económicas y transferencias de dinero de un agente a otro.

### 4.2. Distribución del dinero

Valoramos un sistema de  $N$  agentes económicos y consideramos el caso donde  $N$  es constante. Cada agente  $i$  tiene una cantidad  $m_i$  de dinero que puede cambiar con otros agentes. Ese dinero se utiliza para una actividad económica como comprar o vender productos, pero no nos centraremos en ese aspecto. Para nosotros el resultado de una transacción entre los agentes  $i$  y  $j$  de una cierta cantidad de dinero  $\Delta m$  será

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = [m_i - \Delta m, m_j + \Delta m]$$

Observamos que la cantidad total de dinero se conserva ya que en cada transacción  $m_i + m_j = m'_i + m'_j$ . Esta conservación local del dinero es análoga a la conservación de la energía en la colisión de las partículas.

Además, asumimos que la economía del sistema es cerrada, es decir, no hay flujo externo de dinero como por ejemplo impresión de billetes. Por lo tanto, la cantidad

total de dinero  $M$  en el sistema se conserva. En la primera parte de esta sección no se permite tener deuda por lo tanto el dinero de todos los agentes no es negativo,  $m_i \geq 0$  que es similar a la condición de la energía de las partículas  $E_i \geq 0$ .

Introducimos la función de distribución del dinero  $P(m)$ , que es la probabilidad de que un agente tenga una cantidad de dinero  $m_i$ . Estamos interesados en la distribución  $P(m)$ .

En analogía con el capítulo anterior 3, obsérvese que en este caso las celdas son intervalos, dividimos el eje del dinero  $0 \leq m \leq \infty$  en  $n$  pequeñas celdas del mismo tamaño. Denotamos al número de agentes en la celda  $i$  como  $N_i$  y al número total de agentes  $N = \sum_1^n N_i$ . Los agentes en la celda  $i$  tienen una cantidad de dinero  $m_i$  que se considerará como la energía y el total del dinero es  $M = \sum_1^n m_i N_i$ . La probabilidad de que salga una combinación de los  $N_i$  es proporcional al número de formas en que se pueden distribuir a los  $N$  agentes en las celdas conservando el conjunto  $N_i$ . Como veíamos en el capítulo anterior, este número es:

$$\binom{N}{N_1, \dots, N_n} = \frac{N!}{N_1! \dots N_n!}$$

El logaritmo de la probabilidad es la entropía (véase 3.4) y además cuando los números  $N_i$  son grandes se puede aplicar la fórmula de Stirling. Se concluye que la entropía es

$$S = \frac{N \ln N - \sum_1^n N_i \ln N_i}{N} = - \sum_1^n P_i \ln P_i$$

donde  $P_i = N_i/N$  que es la probabilidad de que un agente tenga una cantidad de dinero  $m_i$ .

Usando el método de multiplicadores de Lagrange con el fin de maximizar la probabilidad con respecto a las cantidades  $N_i$  usando en este caso las restricciones

$$N = \sum_1^n N_i \quad M = \sum_1^n m_i N_i$$

haciendo los mismos pasos que en capítulo anterior 3.5, genera la distribución de Boltzmann para  $P(m)$  que es  $P(m) = C e^{-m/T}$ . Las constantes  $C$  y  $T$  se ajustan normalizando.

Como es una función de probabilidad

$$\int_0^\infty P(m) dm = 1 \rightarrow \int_0^\infty C e^{-m/T} dm = 1$$

$$\int_0^\infty C e^{-m/T} dm = -TC \int_0^\infty \frac{-1}{T} e^{-m/T} = TC = 1 \rightarrow C = \frac{1}{T}$$

Ahora asumimos que la esperanza debe ser  $M/N$  ya que los agentes son iguales y aleatorios.

$$\int_0^{\infty} mP(m)dm = \frac{M}{N} \rightarrow \int_0^{\infty} m\frac{1}{T}e^{-m/T}dm = \frac{M}{N}.$$

Aplicando integración por partes

$$\int_0^{\infty} m\frac{1}{T}e^{-m/T}dm = (-me^{-m/T})_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-m/T}dm = T \rightarrow T = \frac{M}{N}.$$

### 4.3. Simulaciones informáticas

Siguiendo con lo anterior, haremos algunas simulaciones informáticas para verificar los resultados experimentalmente. Esta parte se basa en comprobar los resultados que aparecen en el artículo [2].

#### 4.3.1. Modelo simple

En este modelo, inicialmente todos los agentes tienen la misma cantidad de dinero. En un tiempo  $t$ , uno de los agentes, de un par aleatorio de agentes, es elegido «ganador» y por ende el otro es «perdedor». El ganador se lleva una cantidad  $\Delta m$  y el perdedor pierde  $\Delta m$ , pero esta transacción sólo puede tener lugar si el perdedor tiene suficiente dinero para pagar, es decir, si  $m_i < \Delta m$  no se produce la transacción y se procede con otro siguiente par de agentes.

La condición de que los agentes no puedan tener dinero negativo es crucial para que el proceso converja a la distribución estacionaria. En el experimento numérico, al principio, la distribución es simétrica pero después la función de densidad empieza a acumularse en la cota  $m = 0$ . Así la distribución se vuelve asimétrica y por último coge la forma de la exponencial.

Haremos la simulación con el programa R para estadística. En esta simulación cogeremos  $N = 400$ ,  $M = 800 * 400$ . Todos los agentes tienen la misma cantidad al principio que son 800\$ y la cantidad que se intercambia en cada transacción es 1\$.

El parámetro clave es el bucle for que representa 200 mil transacciones aleatorias. En nuestro caso el bucle for hay que repetirlo hasta 60 veces para llegar a la gráfica final y que se vea una distribución de Boltzmann. Es decir, en total se hacen unas 360 millones de transacciones<sup>1</sup>.

Otra forma de estimar el tiempo de convergencia es el tiempo que tarda en mi ordenador *MacBook Air 12.1*, tarda 1 minuto y 57 segundos en que salga el resultado cada vez que ejecutamos el bucle for.

Concluimos que efectivamente la distribución del dinero sigue la distribución de Boltzmann. Aunque en este caso converge lentamente.

<sup>1</sup>En verdad son menos ya que, si no se puede realizar la transacción, se pasa al siguiente.

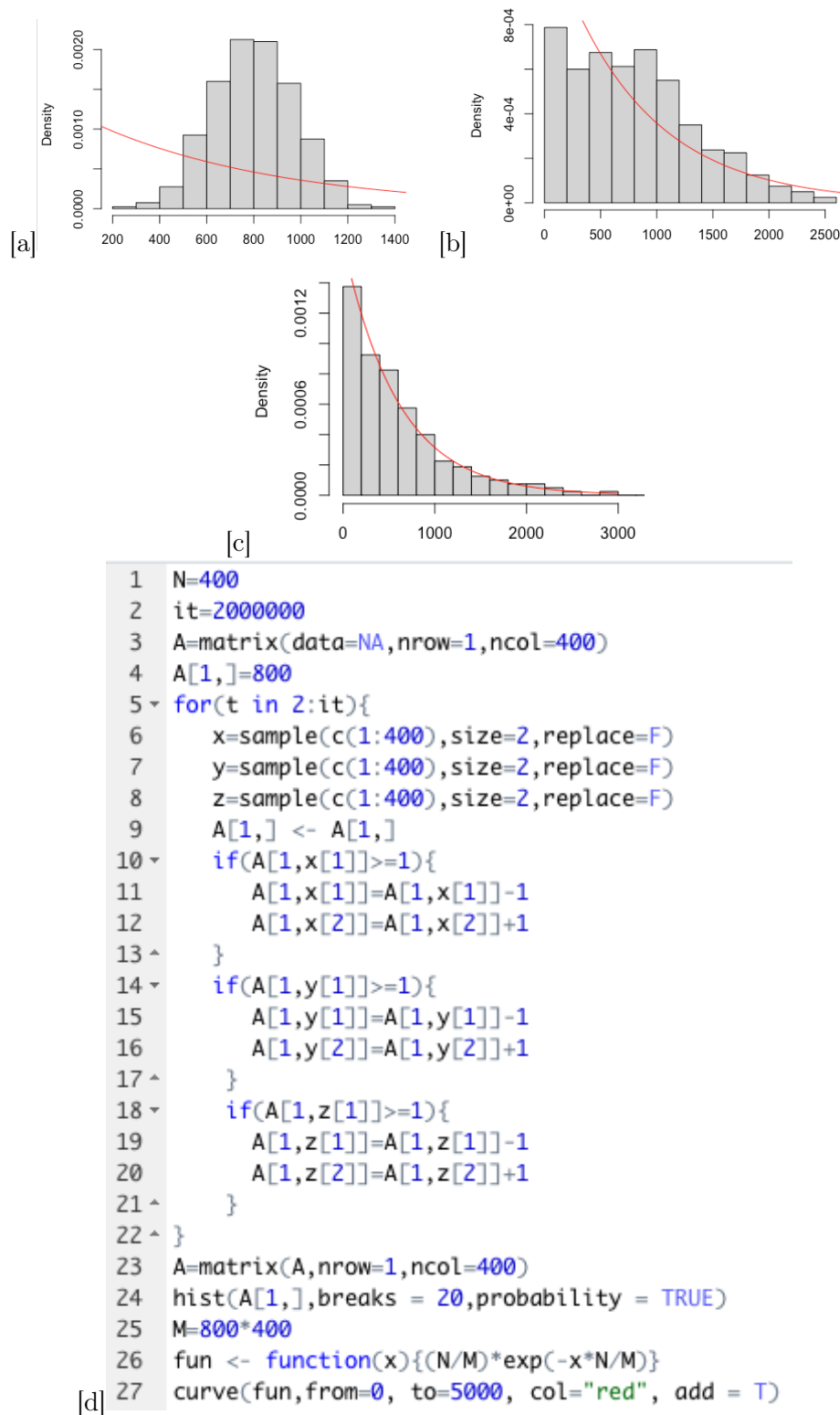


Figura 4.1: (a) Una repetición (b) 10 repeticiones (c) 60 repeticiones (d) comandos programa R

### 4.3.2. Modelo con diferente cantidad inicial

En este modelo, inicialmente los agentes tienen cantidades de dinero aleatorias comprendidas entre 1 y 800. En un tiempo  $t$ , el ganador, aleatoriamente elegido, se lleva una cantidad  $\Delta m$  y el perdedor pierde  $\Delta m$  fijada y la misma para cada transacción, pero esta transacción sólo puede tener lugar si el perdedor tiene suficiente dinero para pagar, es decir, si  $m_i < \Delta m$  no se produce la transacción y se procede con otro siguiente par de agentes. En esta simulación cogemos igualmente  $N = 400$  y la cantidad que se intercambia en cada transacción es 1\$.

Siguimos exactamente el mismo programa anterior a excepción de la matriz inicial <sup>2</sup>. En este caso el bucle for hay que repetirlo casi las mismas veces que el programa anterior, pero converge antes ya que están más distribuidas las cantidades del principio.

Siguiendo el mismo criterio de convergencia que el anterior modelo, cada vez que ejecutamos el programa tarda 1 minuto y 55 segundos en que salga el resultado.

Los dos últimos comandos añadidos son para seleccionar la cantidad inicial aleatoria. En este caso en vez de ser la matriz A inicial formada por NA elementos, será la matriz B inicial formada por el vector aleatorio vecB. Además, los otros comandos representan la parte final de los comandos, donde tenemos que M1 será la suma de la cantidad de dinero inicial de cada agente, es decir,  $M$ .

Concluimos que efectivamente la distribución del dinero sigue la distribución de Boltzmann. Aunque en este caso sigue convergiendo lentamente.

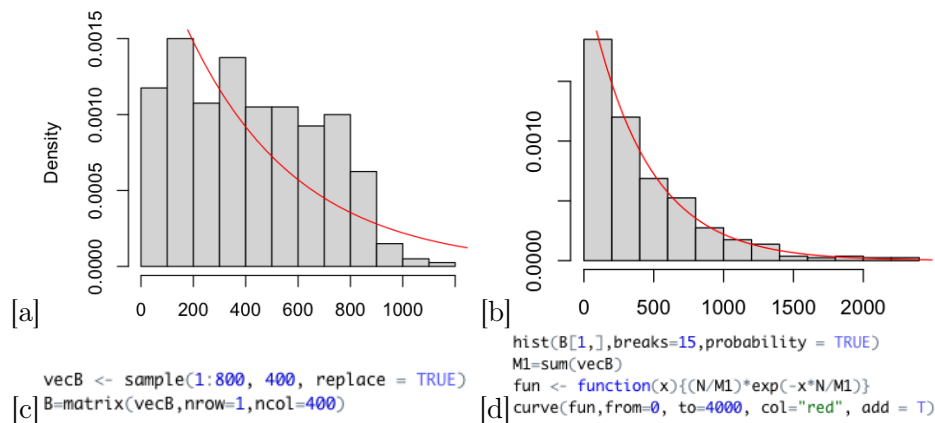


Figura 4.2: (a)Una repetición (b) 50 repeticiones (c)comandos programa R (d)comandos programa R

### 4.3.3. Modelo con cantidad de transacción aleatoria y cantidad inicial aleatoria

Con el fin de simular una situación más realista consideraremos el caso en el que inicialmente los agentes tienen cantidades de dinero aleatorias comprendidas entre

<sup>2</sup>La imagen de esa línea nueva la añadimos después en la página.

1 y 800. En un tiempo  $t$  el ganador, aleatoriamente elegido, se lleva una cantidad  $\Delta m$  y el perdedor pierde  $\Delta m$ , esta cantidad será aleatoria en cada transacción y será  $\nu M/N : 0 < \nu < 1$ , es decir, se coge una fracción de la media del dinero en el sistema, donde  $\nu$  es aleatorio. Al igual que en los casos anteriores, sólo se realiza la transacción si el perdedor tiene suficiente dinero para pagar.

En esta simulación cogeremos  $N = 400$ .

En este caso el parámetro principal sigue siendo el bucle for pero esta vez simula cantidades aleatorias para las transacciones. Aquí, el bucle for hay que repetirlo hasta 30 veces para llegar a la gráfica final y que se vea una distribución de Boltzmann, pero ya incluso en la primera repetición vemos una clara convergencia a lo que queremos.

Siguiendo el mismo criterio de convergencia que el anterior modelo, cada vez que ejecutamos el programa tarda 2 minutos y 5 segundos en que salga el resultado.

Las gráficas de abajo corresponden a la evolución al repetir el bucle, la primera los comandos que se han utilizado para el programa R, la segunda es con una sola repetición y la tercera con 30.

Concluimos que efectivamente la distribución del dinero sigue la distribución de Boltzmann. En este caso se ve una convergencia casi clara desde el principio.

```

1  vecC <- sample(1:800, 400, replace = TRUE)
2  C=matrix(vecC,nrow=1,ncol=400)
3  M2=sum(vecC)
4  N=400
5  it=2000000
6  for(t in 2:it){
7    x=sample(c(1:400),size=2,replace=F)
8    y=sample(c(1:400),size=2,replace=F)
9    z=sample(c(1:400),size=2,replace=F)
10   C[1,] <- C[1,]
11   d <- runif(1, min=0, max=1)
12   if(C[1,x[1]]>=(d*M2/N)){
13     C[1,x[1]]=C[1,x[1]]-(d*M2/N)
14     C[1,x[2]]=C[1,x[2]]+(d*M2/N)
15   }
16   d <- runif(1, min=0, max=1)
17   if(C[1,y[1]]>=(d*M2/N)){
18     C[1,y[1]]=C[1,y[1]]-(d*M2/N)
19     C[1,y[2]]=C[1,y[2]]+(d*M2/N)
20   }
21   d <- runif(1, min=0, max=1)
22   if(C[1,z[1]]>=(d*M2/N)){
23     C[1,z[1]]=C[1,z[1]]-(d*M2/N)
24     C[1,z[2]]=C[1,z[2]]+(d*M2/N)
25   }
26 }
27 hist(C[1,],breaks=15,probability = TRUE)
28 M2=sum(vecC)
29 fun <- function(x){(N/M2)*exp(-x*N/M2)}
30 curve(fun,from=0, to=4000, col="red", add = T)

```

[a]

Figura 4.3: (a)comandos con el programa R

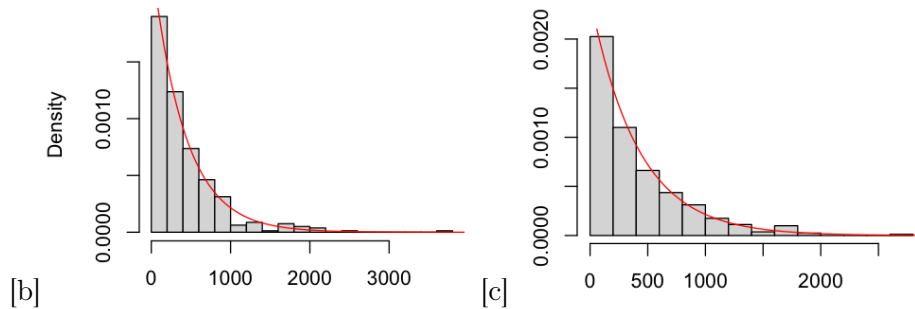


Figura 4.4: (b) una repetición (c)30 repeticiones

#### 4.3.4. Modelo de firmas

Uno podría decir que estas simulaciones corresponden a casos poco realistas o antiguos. Por lo tanto, para hacer un modelo más moderno introduciremos el concepto de firmas. Un agente empieza a ser una firma, éste se comporta de la siguiente manera: pide capital  $K$  de otro agente y se lo devuelve con un interés  $rK$ , además contrata a  $L$  agentes y les paga un sueldo  $W$ , por último, produce  $Q$  objetos que vende a  $Q$  agentes por un precio  $R$ . Todos estos agentes están seleccionados aleatoriamente. Así, la firma recibe un beneficio de  $B=RQ-LW-rK$ . El resultado es un intercambio de dinero que sigue satisfaciendo la ley de la conservación.

Los parámetros de este proceso son seleccionados siguiendo el proceso descrito en los libros de economía. La curva de oferta-demanda del producto viene dada por  $R(Q) = V/Q^\mu$  donde  $Q$  es la cantidad de gente que compraría el producto a una cantidad  $R$ ,  $\mu = 0,5$  y  $V = 100$  que son constantes.

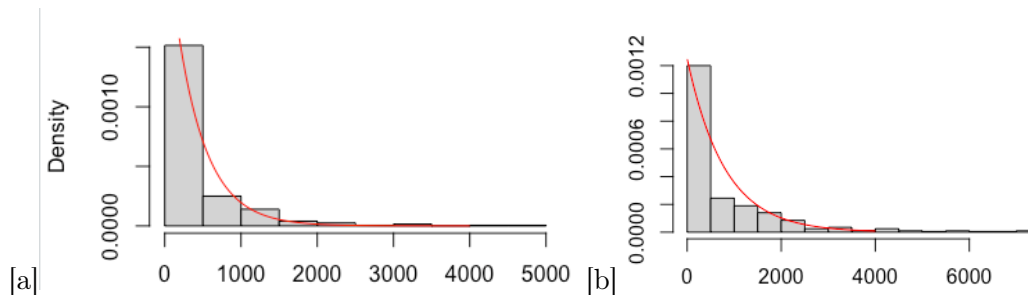
La función de producción de la firma tiene una forma de Cobb-Douglas  $Q(L, K) = L^\beta K^{1-\beta}$  donde  $\beta = 0,8$  constante. Para más información sobre la curva de Cobb-Douglas véase [4].

En nuestra simulación fijamos  $W = 10$ . Maximizando el beneficio de la firma con respecto a  $K$  y  $L$  llegamos a que  $L=20$ ,  $Q=10$ ,  $R=32$ ,  $B=68$  y  $rK=52$ . De todas formas, el valor actual de nuestros parámetros no importa. Las simulaciones muestran que la probabilidad estacionaria de la distribución del dinero de este modelo es la de Boltzmann independientemente de los parámetros del modelo.

Además, el parámetro principal del programa es el bucle for, en este caso en la condición se considera 252 ya que es lo que se necesita para pagar a 20 agentes su sueldo y un prestamista, Después se le añade su beneficio. Aquí, el bucle for lo hemos repetido hasta 80 veces para llegar a la gráfica final y que se vea una convergencia lenta a la distribución de Boltzmann.

Siguiendo el mismo criterio de convergencia que el anterior modelo, cada vez que ejecutamos el programa tarda 2 minutos y 59 segundos en que salga el resultado.

Concluimos que efectivamente la distribución del dinero sigue la distribución de Boltzmann. En este caso se ve una convergencia muy lenta.



```

1  vecE <- sample(1:800, 400, replace = TRUE)
2  E=matrix(vecE,nrow=1,ncol=400)
3  M2=sum(vecE)
4  N=400
5  it=2000000
6  for(t in 2:it){
7    x=sample(c(1:400),size=32,replace=F) #el primero es la empresa,
8    #el segundo el prestamista, los siguientes 20 son los empleados
9    #y los ultimos 10 son los compradores
10   y=sample(c(1:400),size=32,replace=F)
11   z=sample(c(1:400),size=32,replace=F)
12   E[1,] <- E[1,]
13   if(E[1,x[1]]>=252){ #esto es pagar el salario y devolver lo prestado
14     for (l in 3:22) {
15       E[1,x[l]] = E[1,x[l]] - 10
16       E[1,x[l]] = E[1,x[l]] + 10
17     }
18     E[1,x[1]] = E[1,x[1]] - 52
19     E[1,x[2]] = E[1,x[2]] + 52
20     for (g in 23:32) {
21       if(E[1,x[g]]>=32){ #esto es comprar
22         E[1,x[g]] = E[1,x[g]] - 32
23         E[1,x[1]] = E[1,x[1]] + 32
24       }
25     }
26   }
27   if(E[1,y[1]]>=252){ #esto es pagar el salario y devolver lo prestado
28     for (l in 3:22) {
29       E[1,y[l]] = E[1,y[l]] - 10
30       E[1,y[l]] = E[1,y[l]] + 10
31     }
32     E[1,y[1]] = E[1,y[1]] - 52
33     E[1,y[2]] = E[1,y[2]] + 52
34     for (g in 23:32) {
35       if(E[1,y[g]]>=32){ #esto es comprar
36         E[1,y[g]] = E[1,y[g]] - 32
37         E[1,y[1]] = E[1,y[1]] + 32

```



```

37     E[1,y[1]]=E[1,y[1]]+32
38 ^   }
39 ^   }
40 ^ }
41 ^ if(E[1,z[1]]>=252){ #esto es pagar el salario y devolver lo prestado
42 ^   for (l in 3:22) {
43     E[1,z[l]]=E[1,z[l]]-10
44     E[1,z[l]]=E[1,z[l]]+10
45 ^   }
46     E[1,z[1]]=E[1,z[1]]-52
47     E[1,z[2]]=E[1,z[2]]+52
48 ^   for (g in 23:32) {
49 ^     if(E[1,z[g]]>=32){ #esto es comprar
50 ^       E[1,z[g]]=E[1,z[g]]-32
51 ^       E[1,z[1]]=E[1,z[1]]+32
52 ^     }
53 ^   }
54 ^ }
55
56
57 ^ }
58 hist(E[1,],breaks=15,probability = TRUE)
59 M2=sum(vecE)
60 fun <- function(x){(N/M2)*exp(-x*N/M2)}
[d] 61 curve(fun,from=0, to=4000, col="red", add = T)

```

Figura 4.5: (a) una repetición (b) 80 repeticiones (c) comandos con R (d) comandos con R

#### 4.3.5. Modelo con deuda

En esta sección haremos un modelo aún más realista. ¿Qué pasaría si se permitiese a los agentes tener deuda? La deuda puede ser vista como dinero negativo. Ahora, cuando el perdedor no tiene dinero para pagar, puede pedir prestado y su balance será negativo.

La ley de conservación se seguirá cumpliendo ya que la suma del dinero positivo del ganador y el dinero negativo del perdedor sigue siendo constante.

Cuando un agente con balance negativo recibe dinero como ganador, lo utiliza para pagar su deuda hasta que su balance sea positivo. Además, asumiremos que no hay intereses en la deuda y que la cantidad de deuda es limitada, esta deuda límite será  $m_d$  y se cumplirá que  $m_i \geq -m_d \forall i \in [N]$ .

Este modelo hará que varíen algunas constantes de la distribución, como la temperatura. Haremos de nuevo los ajustes normalizando.

Por ser una probabilidad:

$$\int_{-m_d}^{\infty} P(m) dm = 1 \rightarrow \int_{-m_d}^{\infty} C e^{-m/T} dm = 1$$

$$\int_{-m_d}^{\infty} C e^{-m/T} dm = -TC \int_{-m_d}^{\infty} \frac{-1}{T} e^{-m/T} = TC e^{m_d/T} = 1 \rightarrow C = \frac{1}{T e^{m_d/T}}.$$

Ahora como la esperanza es el valor más probable vemos que

$$\int_{-m_d}^{\infty} mP(m)dm = \frac{M}{N} \rightarrow \int_{-m_d}^{\infty} m \frac{1}{T e^{m_d/T}} e^{-m/T} dm = \frac{M}{N}.$$

Aplicando integración por partes

$$\begin{aligned} \int_{-m_d}^{\infty} m \frac{1}{T e^{m_d/T}} e^{-m/T} dm &= \frac{1}{e^{m_d/T}} [(-m e^{-m/T})_{-m_d}^{\infty} - \int_{-m_d}^{\infty} -\frac{1}{T} e^{-m/T} dm] = \\ &= \frac{1}{e^{m_d/T}} [-m_d e^{m_d/T} + T e^{m_d/T}] = -m_d + T = \frac{M}{N} \\ &\rightarrow T = \frac{M}{N} + m_d. \end{aligned}$$

Para la simulación en el programa R, usaremos las mismas condiciones que en la sección 4.3.3 ya que era el modelo más realista y que más rápido convergía. Inicialmente los agentes tienen cantidades de dinero aleatorias comprendidas entre 1 y 800. En un tiempo  $t$  el ganador, aleatoriamente elegido, se lleva una cantidad  $\Delta m$  y el perdedor pierde  $\Delta m$  esta cantidad será aleatoria en cada transacción y será  $\nu M/N : 0 < \nu < 1$ , es decir se coge una fracción de la media del dinero en el sistema, donde  $\nu$  es aleatorio. En este caso se les permite a los agentes tener una deuda de hasta 100. Es decir, un agente puede tener como mínimo -100 de dinero.

En esta simulación cogeremos  $N = 400$ .

En este caso el parámetro principal sigue siendo el bucle for pero esta vez simula cantidades aleatorias para las transacciones las cuales se realizan si el agente tiene suficiente dinero como para que al pagarlo no pase los -100. Aquí, el bucle for lo hemos repetido hasta 70 veces y no todavía le falta para llegar a la solución estacionaria, pero se ve una clara convergencia con el tiempo lentamente.

Siguiendo el mismo criterio de convergencia que el anterior modelo, cada vez que ejecutamos el programa tarda 2 minutos y 42 segundos en que salga el resultado.

Las gráficas de abajo corresponden a la evolución al repetir el bucle, la primera es con una sola repetición, la segunda con 70 y la tercera los comandos que se han utilizado para el programa R.

Concluimos que efectivamente la distribución del dinero sigue la distribución de Boltzmann. En este caso se ve una convergencia es bastante lenta.

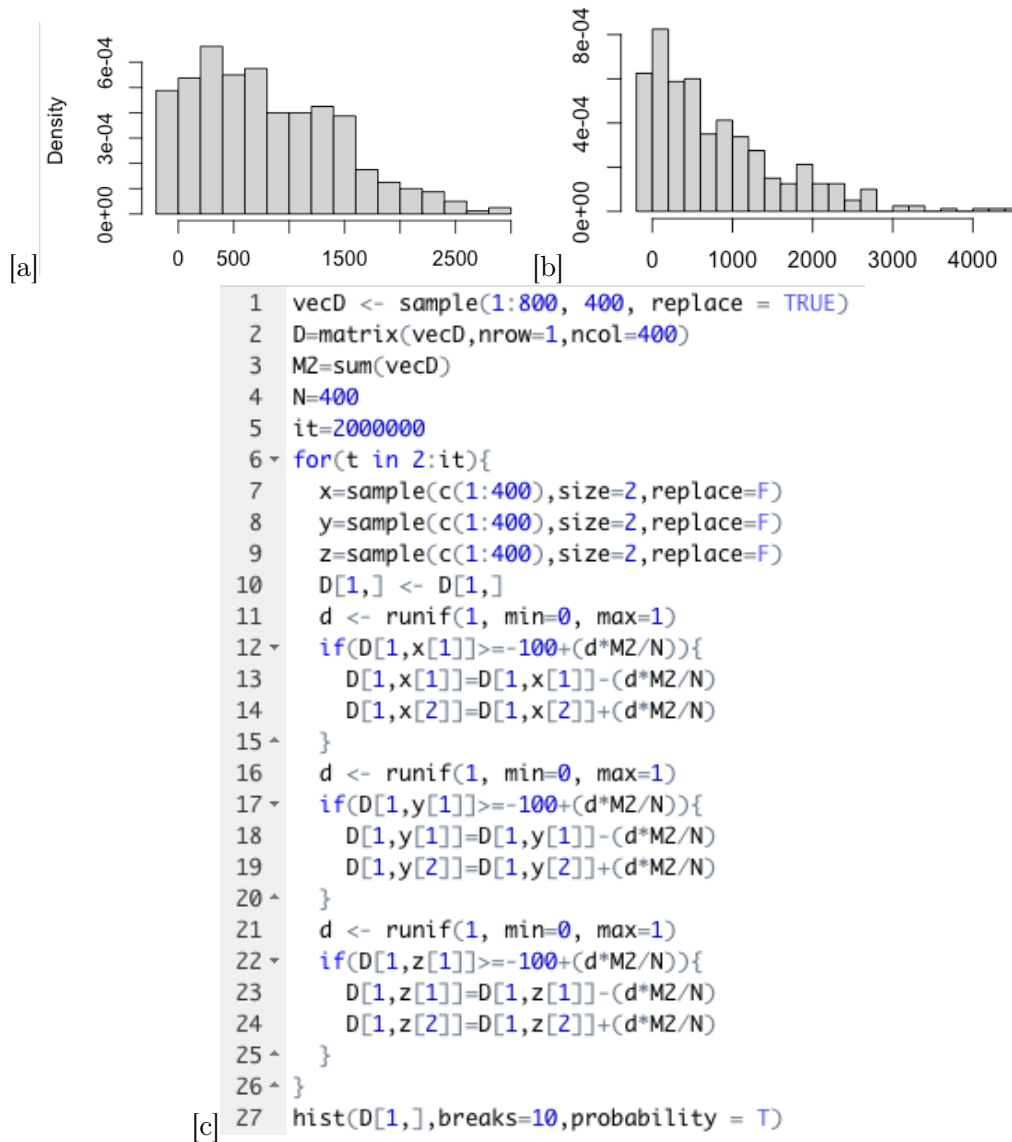


Figura 4.6: (a)Una repetición (b)70 repeticiones (c)comandos programa R

#### 4.4. Condiciones para no cumplir la distribución de Boltzmann

La distribución de Boltzmann también se puede derivar de la evolución en el tiempo de la distribución  $P(m)$  debido a las transacciones por pares:

$$\frac{dP(m)}{dt} = \int \int -f_{[m,m'] \rightarrow [m-\Delta, m'+\Delta]} P(m)P(m') + f_{[m-\Delta, m'+\Delta] \rightarrow [m,m']} P(m-\Delta)P(m+\Delta) dm' d\Delta.$$

Donde  $f_{[m,m'] \rightarrow [m-\Delta,m'+\Delta]}$  es la tasa de transferencia de dinero  $\Delta$  de un agente con dinero  $m$  a otro agente con dinero  $m'$ .

Si el modelo tiene simetría en la inversión con respecto del tiempo, entonces la tasa de transacción directa  $f_{[m,m'] \rightarrow [m-\Delta,m'+\Delta]}$  y la tasa de transacción inversa  $f_{[m-\Delta,m'+\Delta] \rightarrow [m,m']}$  son iguales. En este caso la distribución de Boltzmann  $P(m) = Ce^{-m/T}$  se anula y esta distribución es estacionaria, es decir,  $dP(m)/dt = 0$ .

Se dice que la tasa de transacción es la misma si cuando compones una con otra te da la identidad. Por ejemplo, en el caso de 4.1 la composición de la tasa de transacción inversa y directa vuelve a la cantidad inicial de dinero,

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m_i - 1, m_j + 1] \rightarrow [m_i - 1 + 1, m_j + 1 - 1] = [m_i, m_j].$$

Por otro lado, si la simetría de inversión con respecto del tiempo se rompe, las tasas de transacción  $f$  serían diferentes y por lo tanto el sistema podría no cumplir la distribución de Boltzmann o no tener distribución estacionaria. Veamos un ejemplo donde no se cumple la simetría de inversión.

*El intercambio aleatorio multiplicativo:*

Seleccionamos un perdedor  $i$  aleatoriamente y una fracción  $\alpha$  fija del dinero  $m_i$ , y seleccionamos un ganador  $j$  aleatorio, por lo tanto la transacción directa quedaría como:

$$[m_i, m_j] \rightarrow [(1 - \alpha)m_i, m_j + \alpha m_i]$$

pero si la componemos con la transacción inversa, donde el ganador de la transacción anterior ahora es el perdedor y viceversa, quedaría como:

$$[(1 - \alpha)m_i, m_j + \alpha m_i] \rightarrow [(1 - \alpha)m_i + \alpha(m_j + \alpha m_i), (1 - \alpha)(m_j + \alpha m_i)] \neq [m_i, m_j]$$

La distribución exponencial no es una solución estacionaria de la derivada de la ecuación de Boltzmann.

Para nuestra simulación consideramos  $\alpha = 1/3$ . En la imagen observamos que la cola del final tiene la misma distribución, pero cae a cero a la cola del principio.

El parámetro principal es el bucle for que realiza 3 transacciones en cada iteración, observamos que ya no es necesario poner la condición de que tenga dinero suficiente para el ganador ya que siempre el perdedor da  $1/3$  de lo que tiene, por eso hay pocos agentes que llegan a tener cerca de 0.

Aquí, el bucle for lo hemos repetido hasta 100 veces para llegar a la gráfica final y que se vea que no converge a la distribución de Boltzmann.

Siguiendo el mismo criterio de convergencia que el anterior modelo, cada vez que ejecutamos el programa tarda 14,7 segundos en que salga el resultado.

Las gráficas de abajo corresponden a la evolución al repetir el bucle, la primera es con una sola repetición, la segunda con 100 y la tercera los comandos que se han utilizado para el programa R.

Concluimos que efectivamente la distribución del dinero no sigue la distribución de Boltzmann.

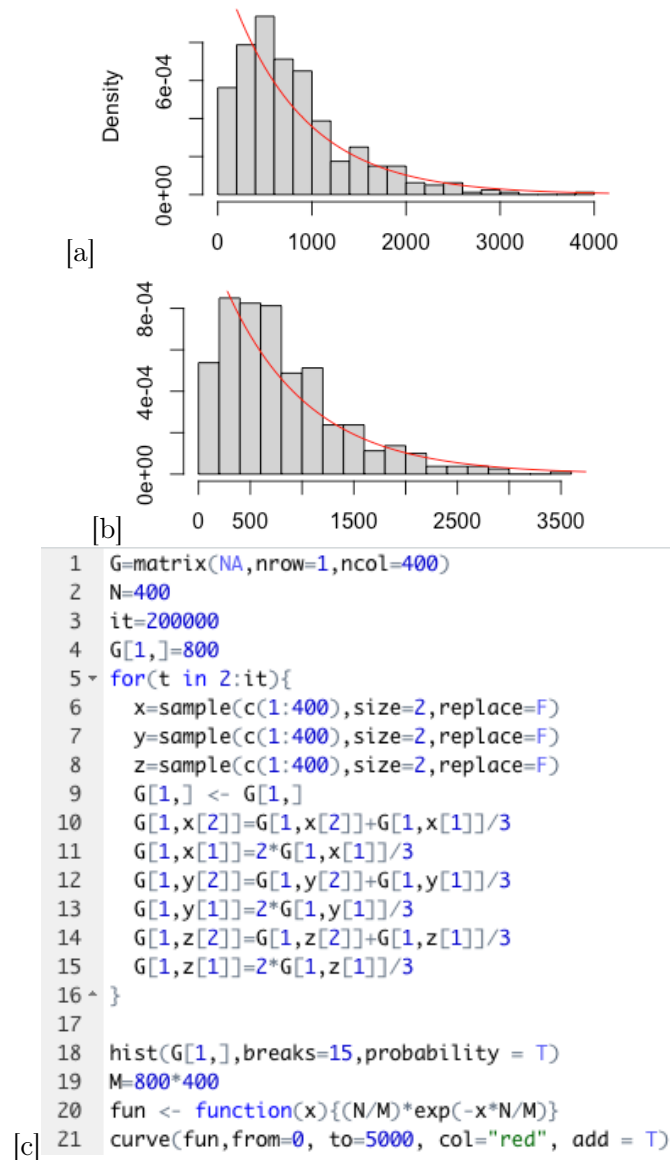


Figura 4.7: (a)Una repetición (b) 100 repeticiones (c)comandos programa R

Este ejemplo muestra que la distribución de Boltzmann no es totalmente universal, lo que significa que no es válida para cualquier modelo de cambio que conserve dinero. Sin embargo, es universal en un sentido limitado: Para una amplia clase de modelos que tienen simetría inversa de tiempo, la distribución estacionaria es exponencial y no depende de los detalles de un modelo. Por el contrario, cuando se rompe la simetría de inversión de tiempo, la distribución puede depender de los detalles del modelo.



# Bibliografía

---

- [1] Peter Dalgaard. *Introductory statistics with R*. Springer, 2020.
- [2] A. Dragulescu and V.M. Yakovenko. Statistical mechanics of money. *The European Physical Journal B*, 17(4):723–729, oct 2000.
- [3] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: an Applied Introduction*. Pearson Addison Wesley, Boston, 2004.
- [4] Catalin Angelo Ioan and Gina Ioan. The Complete Theory of Cobb-Douglas Production Function. *Acta Universitatis Danubius. OEconomica*, (11(1)):74–114, February 2015.
- [5] J.A. Peris. *Curso de termodinámica*. Alhambra Universidad. Alhambra, 1989.
- [6] Wikipedia. Multiplicadores de lagrange — wikipedia, la enciclopedia libre, 2021. [Internet; descargado 20-junio-2022].
- [7] Wikipedia contributors. Stirling’s approximation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. [Online; accessed 20-June-2022].
- [8] Victor M. Yakovenko and J. Barkley Rosser. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Rev. Mod. Phys.*, 81:1703–1725, Dec 2009.

