



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

# Problemas inversos y redes neuronales

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

*Autor:* Lucía Colmenarejo Pérez

*Tutor:* Daniel Faraco Hurtado

Curso 2020-2021



## Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean commodo ligula eget dolor. Aenean massa. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Donec quam felis, ultricies nec, pellentesque eu, pretium quis, sem. Nulla consequat massa quis enim. Donec pede justo, fringilla vel, aliquet nec, vulputate eget, arcu. In enim justo, rhoncus ut, imperdiet a, venenatis vitae, justo. Nullam dictum felis eu pede mollis pretium. Integer tincidunt. Cras dapibus. Vivamus elementum semper nisi. Aenean vulputate eleifend tellus. Aenean leo ligula, porttitor eu, consequat vitae, eleifend ac, enim. Aliquam lorem ante, dapibus in, viverra quis, feugiat a, tellus. Phasellus viverra nulla ut metus varius laoreet. Quisque rutrum. Aenean imperdiet. Etiam ultricies nisi vel augue. Curabitur ullamcorper ultricies nisi. Nam eget dui. Etiam rhoncus. Maecenas tempus, tellus eget condimentum rhoncus, sem quam semper libero, sit amet adipiscing sem neque sed ipsum. Nam quam nunc, blandit vel, luctus pulvinar, hendrerit id, lorem. Maecenas nec odio et ante tincidunt tempus. Donec vitae sapien ut libero venenatis faucibus. Nullam quis ante. Etiam sit amet orci eget eros faucibus tincidunt. Duis leo. Sed fringilla mauris sit amet nibh. Donec sodales sagittis magna. Sed consequat, leo eget bibendum sodales, augue velit cursus nunc,

## Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aenean commodo ligula eget dolor. Aenean massa. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Donec quam felis, ultricies nec, pellentesque eu, pretium quis, sem. Nulla consequat massa quis enim. Donec pede justo, fringilla vel, aliquet nec, vulputate eget, arcu. In enim justo, rhoncus ut, imperdiet a, venenatis vitae, justo. Nullam dictum felis eu pede mollis pretium. Integer tincidunt. Cras dapibus. Vivamus elementum semper nisi. Aenean vulputate eleifend tellus. Aenean leo ligula, porttitor eu, consequat vitae, eleifend ac, enim. Aliquam lorem ante, dapibus in, viverra quis, feugiat a, tellus. Phasellus viverra nulla ut metus varius laoreet. Quisque rutrum. Aenean imperdiet. Etiam ultricies nisi vel augue. Curabitur ullamcorper ultricies nisi. Nam eget dui. Etiam rhoncus. Maecenas tempus, tellus eget condimentum rhoncus, sem quam semper libero, sit amet adipiscing sem neque sed ipsum. Nam quam nunc, blandit vel, luctus pulvinar, hendrerit id, lorem. Maecenas nec odio et ante tincidunt tempus. Donec vitae sapien ut libero



# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>El problema inverso de Calderón: conocimientos previos</b>	<b>3</b>
2.1	Espacios de Sóbolev y Transformada de Fourier . . . . .	3
2.2	Teoría de Fredholm . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Planteamiento del problema inverso de Calderón</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>El método de Nachman</b>	<b>21</b>
4.1	De $\Lambda_\gamma$ a $\psi _{\partial\Omega}$ usando ecuación integral de límites . . . . .	24
4.2	De $\psi _{\partial\Omega}$ a $t$ mediante la integración en el límite . . . . .	26
4.3	De $t$ obtener $\mu$ mediante la ecuación de D-bar . . . . .	27
4.4	De $\mu$ obtener $\gamma$ . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Problema Inverso de Calderón en Redes Neuronales</b>	<b>29</b>
5.1	Dirichlet-to-Neumann en un disco con un potencial radial de un paso .	29
5.2	Transformada de Fourier en un disco con un potencial radial de un paso	34
5.3	Conclusiones y trabajo futuro. . . . .	36



# CAPÍTULO 1

## Introducción

---

En este trabajo de fin de grado trataremos los llamados problemas inversos, más específicamente, el problema inverso de Calderón. En primer lugar daremos una noción general de qué son los problemas inversos, los cuales son lo contrario a los problemas directos. En un problema directo uno encuentra un efecto procedente de una causa, por el contrario, en un problema inverso una vez dado el efecto se quiere descubrir o averiguar cuál es la causa que lo produce.

Los problemas inversos surgen de la necesidad de interpretar medidas indirectas e incompletas. Resolver un problema inverso implica la implementación de un algoritmo computacional que recupera información “útil” de los datos medidos (la palabra “útil” se puede entender mejor en el contexto de una aplicación en particular). En los problemas inversos podemos diferenciar dos tipos: los problemas inversos lineales y los no lineales.

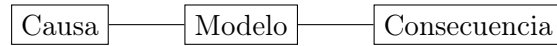
- Problemas inversos lineales. Son todos esencialmente iguales, por lo tanto, tiene sentido aplicar una metodología general diseñada para complementar los datos de medición con información a priori.
- Problemas inversos no lineales. Son todos diferentes entre sí y necesitan métodos de solución dedicados. Una forma de proceder es utilizar los resultados de los problemas inversos analítico-geométricos de tradición investigadora para construir algoritmos regularizados.

En este caso nos centraremos en los últimos, más en concreto, en el Problema Inverso no lineal de Calderón.

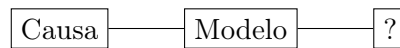
Dado que nuestro objetivo es realizar una introducción a los problemas inversos, cabe mencionar lo que dijo el matemático chileno Günther Uhlmann:

*“Podemos decir que un problema inverso es en el cual uno conoce la respuesta, pero no conoce cual es la pregunta”.*

Vamos a representarlo mediante un gráfico para que se comprenda mejor la situación.



Observando dicho diagrama el problema directo sería calcular la consecuencia una vez conocidos la causa y el modelo.



En cambio, el problema inverso se podría plantear de dos maneras. Por una parte el problema inverso que trata de calcular el modelo conociendo la consecuencia y la causa; y por otro lado, el problema inverso para obtener la causa conociendo el modelo y la consecuencia. Nosotros nos centraremos en este último.



Cabe destacar que los problemas inversos son considerados “mal puestos” si seguimos la definición del matemático Hadamard. Dicho matemático dijo que para que un problema fuera “bien puesto”, es decir, bien planteado, necesitaba cumplir las siguientes tres condiciones:

1. Existencia: debe existir al menos una solución.
2. Singularidad: debe haber como máximo una solución.
3. Estabilidad: la solución debe depender continuamente de los datos.

En la mayoría de los problemas inversos no se tiene toda la información y raramente se puede responder a las tres condiciones anteriores, por lo que se consideran “mal puestos”. Pese a este hecho, hay algunos problemas inversos que sí se consideran “bien puestos” dado que cumplen estos tres requisitos. Uno de los problemas más cotidianos que sería un ejemplo es el obtener una imagen de su correspondiente negativo (su problema directo sería invertir una fotografía dada para llegar al negativo).

Dado que la mayoría de los problemas inversos no cumplen los tres principios establecidos por Hadamard, los problemas inversos dan lugar a preguntas como la inyectividad de la solución, la continuidad, su inversa (si existe), el rango... Todos estos temas los trataremos en los siguientes apartados más en profundidad.



## CAPÍTULO 2

# El problema inverso de Calderón: conocimientos previos

---

Alberto Pedro Calderón nació en Mendoza (Argentina) en el año 1920 y fue uno de los matemáticos argentinos más importantes del siglo XX. Su nombre se vincula principalmente a la Universidad de Chicago, donde Calderón y su mentor, el analista Antoni Zygmund, comenzaron una de las colaboraciones más largas e importantes de la historia de las matemáticas (durante más de 30 años). Juntos desarrollaron la teoría de operadores definidos por integrales singulares creando así la “Escuela de Análisis Matemático de Chicago”.

Calderón después de graduarse como ingeniero consiguió un trabajo en el laboratorio de investigación de la división de geofísica de la compañía petrolera estatal, YPF (Yacimientos Petrolíferos Fiscales), pero nunca abandonó su verdadera vocación, las matemáticas. Es en este laboratorio es donde surge el problema que nos atañe. Calderón concibe la posibilidad de determinar la conductividad de un cuerpo al hacer mediciones eléctricas en el contorno del mismo. Sin embargo, hasta 1980 no fue cuando publicó sus resultados en un pequeño artículo brasileño [1].

Previamente, analizaremos una serie de conceptos previos que nos serán de utilidad para la comprensión del problema.

### 2.1. Espacios de Sóbolev y Transformada de Fourier

**Definición Espacio de Sóbolev.** Un espacio de Sóbolev es un espacio vectorial normado de funciones, que puede verse como un subespacio de un espacio  $L^p$ , tal que sus derivadas de orden  $m$  pertenecen también a  $L^p$ . Dado un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  el espacio de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  se define como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\} \subset L^p(\Omega)$$

Donde  $D^\alpha f$  es la notación multi-índice para las derivadas parciales. Definimos el multi-índice  $\alpha$  tal que  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  la derivada parcial operador  $D^\alpha$  por:

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

**Definición de derivada débil.** Sea  $\alpha$  un multi-índice, la función  $D^\alpha f$  (que actualmente es una clase de equivalencia de funciones) es llamada la  $\alpha$  derivada suave de  $f$  para cualquier función test  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que:

$$\langle D^\alpha f, \phi \rangle = \int_{\Omega} D^\alpha f(x) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \phi \rangle$$

La derivada débil nos facilita una herramienta crucial en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales. Su rasgo principal es el hecho de que cualquier función, simplemente siendo localmente integrable es candidata a poder derivarse un número infinito de veces, como si fuese de clase  $C^\infty$ .

**Definición de la Transformada de Fourier.** La función transformada de Fourier es una función definida en  $\mathbb{R}^n$  y viene dada por:

$$F(x)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

Una conclusión suficiente para la existencia de la transformada de Fourier es que  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , es decir,  $\|f\|_1 = \int |f| dx < \infty$ . Además a este hecho le sumamos la siguiente implicación: si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ . Sin embargo tenemos que tener en cuenta que el recíproco es falso:  $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}) \not\Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$

La relación que guardan las transformada de Fourier de tanto  $f(x)$  como de  $f'(x)$ , si existe, es la siguiente:

$$F(f'(x))(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$

Es más, si  $f(x)$  y todas sus derivadas tienen transformada de Fourier, entonces podemos realizar la generalización como sigue:

$$F(f^{(k)}(x))(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi) \text{ para } k = 1, \dots, m$$

Si  $f$  y  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  entonces la inversa de Fourier de la transformada es:

$$F^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Con estas definiciones preliminares podemos proceder a enunciar una serie de teoremas y demostraciones que nos serán de utilidad en un futuro.

**Teorema.**

Si  $u, D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $F(D^\alpha u) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Si  $u, x^\alpha D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $F(x^\alpha D^\alpha u) = (iD\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Estos enunciados permiten extender la transformada de Fourier a las funciones  $L^2$  mediante el siguiente teorema.

**Teorema.** Para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  existe una única  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\hat{f} = F(f)$  en el sentido de que si  $\{\phi_n(x)\} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  es tal que  $\|\phi_n - f\|_2 \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $\hat{\phi}_n = F(\phi_n) \in L^2(\mathbb{R})$  es tal que  $\|\hat{\phi}_n - \hat{f}\|_2 \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Uno de los teoremas más importantes que vamos a ver en este apartado es el siguiente:

**Teorema 2.1. (Teorema de inclusión de Sobolev)** Supongamos  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\xi^p \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$  para  $p \leq M$ . Entonces  $f$  tiene derivadas en el  $L^2$  sentido de todos los órdenes menores o iguales que  $M$  y esas  $L^2$  derivadas pertenecen a  $C_0$  para  $p \leq M - 1$ .

*Demostración.*

$$\xi^p \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ para } p \leq M \text{ implica que } f^{(p)} = F^{-1}((i\xi)^p \hat{f}(\xi))$$

debido a la primera afirmación del teorema anterior. Además,  $(1 + \xi^2)^{M/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$

Debemos ver que  $\xi^q \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$  para  $q \leq M - 1$  que implica:

$$F^{-1}((i\xi)^q \hat{f}(\xi)) \in C_0(\mathbb{R}) \text{ y } F^{-1}((i\xi)^q \hat{f}(\xi)) = f^{(q)}(x) \text{ a.e.}$$

Por la inecuación de Hölder  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$  con  $1 \leq p, q \leq \infty$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (\*) tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^q |\hat{f}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^q}{(1 + \xi^2)^{M/2}} (1 + \xi^2)^{M/2} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{2q}}{(1 + \xi^2)^M} d\xi \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^M |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq C \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{2q}}{(1 + \xi^2)^M} d\xi \right)^{1/2} \leq \infty \text{ ya que } q \leq M - 1. \end{aligned}$$

□

Con este teorema y demostración podemos reescribir la definición de espacio de Sóbolev.

Para un  $s \geq 0$  definimos **espacios de Sóbolev** como:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

con:

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)^2 d\xi \quad \text{y} \quad (u, v)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)^2 \hat{v}(\xi) d\xi$$

Por lo general, nos restringiremos a  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  siendo el disco unidad. Por ello parametrizamos el dominio como:  $\partial\Omega = \{(\cos \theta, \sin \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Denotamos por  $C^\infty(\partial\Omega)$  al espacio de funciones de prueba suaves definidas en  $\partial\Omega$ . Definimos los coeficientes de Fourier para  $f \in C^\infty(\partial\Omega)$  como:

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Los coeficientes de Fourier ofrecen una particular transparencia en la manera de definir los espacios de Sóbolev  $H^s(\partial\Omega)$  consistentes en “s veces funciones débilmente diferenciables” en  $\partial\Omega$ . Esto funciona para toda  $s \in \mathbb{R}$ , no solo para enteros positivos s. Usaremos lo siguiente:

$$f \in L^2(\partial\Omega) \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$$

Primero discutamos la construcción del espacio  $H^1(\partial\Omega)$ . Podemos usar la definición sencilla:

$$(2.1) \quad H^1(\partial\Omega) := \{f \in L^2(\partial\Omega) : f'(\theta) \in L^2(\partial\Omega)\}$$

Le damos un enfoque usando los coeficientes de Fourier. Usando integración por partes obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{f}'(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{df}{d\theta}(\theta) e^{-in\theta} d\theta = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{d}{d\theta}(e^{-in\theta}) d\theta = \\ &= \frac{in}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = in \hat{f}(n) \end{aligned}$$

Si combinamos este resultado con 2.1 obtenemos la definición equivalente de espacio de Sobolev de:

$$H^1(\partial\Omega) := \{f \in L^2(\partial\Omega) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|^2) |\hat{f}(n)|^2 < \infty\}$$

Añadimos el  $(1 + |n|^2)$  para evitar tener un peso 0 en el coeficiente  $n = 0$ . Vemos aquí que la derivada débil de la función  $f \in L^2$  está relacionada con la tasa decreciente de  $|\hat{f}(n)|$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Podemos definirlo para todo  $s \geq 0$ :

$$H^s(\partial\Omega) := \{f \in L^2(\partial\Omega) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|^2)^s |\hat{f}(n)|^2 < \infty\}$$

A continuación, vamos a dar unas definiciones explícitas de los productos internos del espacio de Hilbert y normas para los espacio de Sóbolev  $H^s(\partial\Omega)$  para cualquier real  $s > 0$ . Definimos:

$$\varphi_n^s(\theta) = \frac{w_{-s}(n)}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$$

donde  $n \in \mathbb{Z}$  y la función multiplicativa viene definida por:  $w_s(n) := (1 + |n|^2)^{s/2}$ . Definir un producto interno para  $H^s(\partial\Omega)$  viene dado por:

$$(2.2) \quad \langle f, g \rangle_s := \langle f, g \rangle_{H^s(\partial\Omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_s(n) \hat{f}(n) \overline{w_s(n) \hat{g}(n)}$$

Escribiremos:

$$\|f\|_s = \|f\|_{H^s(\partial\Omega)} = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_s(n) \hat{f}(n) \overline{w_s(n) \hat{f}(n)} \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle_s^{1/2}$$

Nótese que  $\langle *, * \rangle$  es el producto interno habitual en  $L^2(\partial\Omega)$ . Los coeficientes de Fourier de las funciones:

$$(2.3) \quad \hat{\varphi}_m^s(n) = \frac{w_{-s}(m)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = w_{-s}(m) \delta_m(n)$$

donde  $\delta_m(n) = 1$  cuando  $m = n$  y cero de lo contrario. Ahora sustituyendo 2.3 por 2.2 muestra que lo siguiente es una base ortonormal para el espacio Hilbert  $H^s(\partial\Omega)$ :  $\langle \varphi_n^s, \varphi_l^s \rangle_s = \delta_n(l)$ . La definición de los espacios  $H^s(\partial\Omega)$  para  $s \in \mathbb{R}$  y  $s < 0$  puede darse para la construcción dual:  $H^{-s}(\partial\Omega) = (H^s(\partial\Omega))'$ . Informalmente, uno puede comprobar que una función  $f$  pertenece a  $H^s(\partial\Omega)$  estudiando la finitud de la expresión  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|^2)^s |\hat{f}(n)|^2$ .

## 2.2. Teoría de Fredholm

En este apartado se expondrá de manera compacta la teoría de Fredholm dado que, como veremos más adelante, será de utilidad para explicar ciertos resultados en el Método de Nachman.

Antes de explicar la teoría de Fredholm enunciaremos una serie de definiciones y nociones básicas que nos serán de utilidad de cara a la comprensión de dicha teoría.

**Definición de espacio de Banach.** Es un espacio vectorial dotado de una norma, es decir, un espacio normado que además es completo por la distancia inducida por la norma.

**Definición de operador compacto.** Es un operador lineal  $K$  definido sobre un espacio de Banach  $X$  a otro espacio Banach  $Y$ , tal que la imagen por  $K$  de cualquier conjunto acotado de  $X$  es “relativamente compacto” de  $Y$ . Este tipo de operadores son acotados y, por tanto, continuos.

**Definición de operador invertible.** Un operador  $A \in \mathcal{B}(X)$  se llama invertible si existe un  $B \in \mathcal{B}(X)$  tal que  $AB = I$  y  $BA = I$ .

La idea básica consiste en que un operador compacto,  $K$ , es “pequeño” en comparación con un operador invertible,  $I$ . Es así como  $I \pm K$  resulta ser más similar a  $I$  que a  $K$ . Cuando  $K$  es “muy pequeño”, tendremos que  $I - K$  es invertible (por lo que su kernel es 0, propiedad necesaria pero no suficiente para los operadores invertibles). Por el contrario, cuando  $K$  “no es tan pequeño”, por lo menos el  $\text{Ker}(I - K)$  será de dimensión finita.

La cuestión de conocer la imagen de  $I - K$  está relacionada con el problema de resolver  $x - Kx = f$ , para lo cual se requiere  $f \in \text{Im}(I - K)$ . Este es nuestro propósito principal, ya que este tipo de ecuaciones son las que irán apareciendo a lo largo del trabajo.

**Notación.**  $\text{Im}T = T(X) \subseteq Y$ , la imagen de un operador  $T : X \rightarrow Y$ .

**Definición.** Definimos la norma 2 de dicho operador compacto como sigue:

$$(2.4) \quad B(K) = \left( \int \int |K(t, s)|^2 ds dt \right)^{1/2}$$

Si iteramos  $i$  veces,  $K^i = K \circ K \dots \circ K : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$ , nuestro operador viene dado por la siguiente ecuación:

$$(K^i f)(t) = \int_a^b K^{(i)}(t, s) f(s) ds$$

El kernel de dicho operador, también llamado *kernel iterado*, se calcula de la siguiente manera (para  $i > 0$ ):

$$K^{(i)}(t, s) = \int_a^b K^{(i-1)}(t, u) K(u, s) du$$

De manera adicional y de cara a la demostración del teorema de la Alternativa de Fredholm expuesto más adelante, vamos a enunciar la siguiente proposición, cuyo objetivo es dar una cota puntual al operador integral  $K^i f$ .

**Proposición:**

1.  $B(K^{(i)}) \leq (B(K))^i$
2. Para  $i \geq 3$ ,  $|K^{(i)}(t, s)| \leq \|K\|^2 (B(K))^{i-2}$  para todo  $t, s$ .

Es así como obtenemos la siguiente cota:

$$|(K^i f)(t)| \leq \int_a^b |K^{(i)}(t, s)| |f(s)| ds \leq (b-a) \|K\|^2 (\sup|f|) B(K)^{i-2} \quad (*)$$

**Proposición.** Si  $B(K) \leq 1$  y  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , entonces la suma  $\sum_{i=0}^{\infty} K^i f$  converge uniformemente en  $[a, b]$ . La demostración es trivial dado que la cota puntual que definimos en (\*) converge.

A continuación definiremos los dos **tipos de ecuaciones de Fredholm**.

1. Una *ecuación de Fredholm de la 1ª especie* es  $Kx = f$ .
2. Una *ecuación de Fredholm de la 2ª especie* es  $(I - K)x = f$ .

Estas ecuaciones se llaman homogéneas cuando  $f = 0$ .

La ecuación de la 2ª especie es más fácil de estudiar por lo que nos centraremos en estudiar, principalmente, las ecuaciones del tipo:  $(I - \lambda K)x = f$ .

Vamos a definir qué es un operador adjunto y su relación con el operador lineal, recurso usado en la demostración del teorema de la Alternativa de Fredholm.

**Definición de operador adjunto**

Si se define un operador lineal  $T$  en un espacio vectorial, con un producto interno  $\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle$ , entonces se cumple que:

$$\langle T(\bar{u}) | \bar{v} \rangle = \langle \bar{u} | T^*(\bar{v}) \rangle$$

donde  $T^*$  es el llamado operado adjunto de  $T$ . El operador adjunto se basa en la generalización de la matriz traspuesta-conjugada y permite establecer la relación entre el operador lineal y el producto interno en el espacio vectorial normado.

EL lema que vamos a demostrar nos aporta una serie propiedades muy importantes entre el operador adjunto y el operador lineal.

**Lema** Sea  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal entre espacios con producto interno. Supongamos que existe un adjunto  $T^* : Y \rightarrow X$  definido en todo  $Y$ . Entonces:

1.  $ImT \perp KerT^*$ .
2. Supongamos  $Y = X$  y  $dimX < \infty$ . Entonces:
  - a)  $dimKerT = dimKerT^*$ ,
  - b)  $ImT = (KerT^*)^\perp$ .
3. Si  $T$  es un isomorfismo de  $X = Y$ , entonces  $x \perp y \Leftrightarrow T^{-1}x \perp T^*y$ , es decir,  $T^{-1}(Y^\perp) = (T^*Y)^\perp$ .

*Demostración.* Vamos a demostrar los tres puntos por separado:

1. Sean:

$$y_1 \in ImT \Rightarrow y_1 = Tx_1 (x_1 \in X)$$

$$y_2 \in KerT^* \Rightarrow T^*y_2 = 0$$

Entonces usando la definición de adjunto de  $T$  donde  $\langle T(\bar{u}) | \bar{v} \rangle = \langle \bar{u} | T^*\bar{v} \rangle$ :

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \langle Tx_1, y_2 \rangle = \langle x_1, T^*y_2 \rangle = \langle x_1, 0 \rangle = 0$$

Así que queda demostrado que  $y_1 \perp y_2$ .

2. Definimos las siguientes dimensiones como sigue:

$$dimX = n, dimKerT = r \text{ y } dimKerT^* = r^*.$$

- a) Como en (1) tenemos que  $ImT \perp KerT^*$  esto implica que:

$$dimImT \leq dim(KerT^*)^\perp$$

Teniendo en cuenta las dimensiones supuestas y la anterior desigualdad podemos obtener que:

$$dimImT \leq dim(KerT^*)^\perp = dimX - dimKerT^* = n - r^*$$

Uniendo lo que sabemos acerca de  $n$  deducimos que:

$$n = dimX = dimKerT + dimImT$$

$$n \geq dimImT + r^*$$

Así:

$$dimKerT + dimImT \geq dimImT + r^* \Rightarrow r = dimKerT \geq r^* \Rightarrow r \geq r^*$$

Del mismo modo operamos con  $T^*$  y su adjunto ( $T^{**} = T$ ) y tenemos que:

Por (1):  $dimImT^* \geq dim(KerT)^\perp$



Junto con las dimensiones previamente definidas llegamos a:

$$\dim \text{Im} T^* \leq \dim(\text{Ker} T)^\perp = \dim X - \dim \text{Ker} T = n - r \Rightarrow \text{Im} T^* \leq n - r$$

Uniendo lo que sabemos acerca de  $n$  deducimos que:

$$\begin{aligned} n &= \dim X = \dim \text{Ker} T^* + \dim \text{Im} T^* \\ n &\geq \dim \text{Im} T^* + r \end{aligned}$$

Deducimos que:

$$\dim \text{Im} T^* + \dim \text{Ker} T^* \geq \dim \text{Im} T^* + r \Rightarrow \dim \text{Ker} T^* \geq r \Rightarrow r^* \geq r$$

Si juntamos lo que hemos obtenido ( $r \geq r^*$  y  $r^* \geq r$ ) llegamos a la conclusión de que  $r^* = r \Rightarrow \dim \text{Ker} T^* = \dim \text{Ker} T$ .

b) Del apartado anterior sabemos que:

$$\dim \text{Im} T = \dim X - \dim \text{Ker} T = n - r$$

Además, usando que  $\dim \text{Ker} T = \dim \text{Ker} T^*$  tenemos:

$$\dim \text{Im} T = \dim X - \dim \text{Ker} T^* = n - r^*$$

Así:  $\dim \text{Im} T = n - r = n - r^* = \dim(\text{Ker} T^*)^\perp$

Por lo que sabemos que ambos conjunto tienen la misma dimensión, con que uno de ellos contenga al otro es suficiente para comprobar que son iguales. Sin embargo, por 1) teníamos que:

$$\text{Im} T \perp \text{Ker} T^* \Rightarrow \text{Im} T \subseteq (\text{Ker} T^*)^\perp$$

3. Si usamos la propia definición de adjunto tenemos que:

$$\langle x, y \rangle = \langle TT^{-1}x, y \rangle = \langle T^{-1}x, T^*y \rangle$$

Luego si juntamos a este hecho la condición de que  $X = Y$  entonces podemos deducir que:

$$0 = \langle x|y \rangle \Rightarrow x \perp y \Leftrightarrow T^{-1}x \perp T^*y \Rightarrow \langle T^{-1}x|T^*y \rangle = 0$$

Luego si

$$x \perp y \Rightarrow T^{-1}x = T^{-1}(Y^\perp)$$

Con lo que si

$$T^{-1}x \perp T^*y = T^{-1}(Y^\perp) \perp T^*(Y) = T^{-1}(Y^\perp) = (T^*(Y))^\perp.$$

□

A continuación vamos a enunciar y demostrar el teorema que más vamos a usar de Fredholm de cara en adelante.

**Teorema 2.2. Teorema de la Alternativa de Fredholm**

Sea  $K(t, s)$  un kernel continuo que define el operador  $K : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$ . Entonces:

1.  $\dim \text{Ker}(I - K) = \dim \text{Ker}(I - K^*) < \infty$
2.  $\text{Im}(I - K) = (\text{Ker}(I - K^*))^\perp$
3.  $\text{Im}(I - K^*) = (\text{Ker}(I - K))^\perp$

Este enunciado se considera una "alternativa" por las siguientes dos razones:

1. Alternativa (a):  $\dim \text{Ker}(I - K) = 0$ .

En esta situación  $I - K, I - K^*$  son 1-a-1. Como  $0^\perp = \mathcal{C}[a, b]$ , tanto  $I - K$  como  $I - K^*$  son sobreyectivas y, por tanto, son isomorfismos. Entonces para esta alternativa se nos plantea la siguiente situación:

$(I - K)x = f$  tiene una solución única para cada  $f$

$(I - K)x = 0$  tiene sólo la solución 0 (como se apunta en esta alternativa)

2. Alternativa (b):  $\dim \text{Ker}(I - K) = n > 0$ .

Tomamos una base  $y_1, \dots, y_n$  de  $\text{Ker}(I - K)$ , es decir, una base para las soluciones de  $(I - K)y = 0$ , con  $n \geq 1$ .

Si  $f \perp y_j$  para todo  $1 \leq j \leq n$  entonces  $f \in \text{Im}(I - K)$ , es decir,

$(I - K)x = f$  tiene una solución,

mientras si  $f$  no es perpendicular para  $y_j$  (para algún  $j$ ), entonces la ecuación  $(I - K)x = f$  no tiene solución.

En ambas alternativas el trato sería similar para  $K^*$  que para  $K$ . De igual manera, podríamos considerar la alternativa (a) como un caso particular de la (b) en el caso  $n = 0$ .

*Demostración.* La demostración de la Alternativa de Fredholm se va a dividir en 3 partes:

Parte 1:

Supongamos que  $B(K) < 1$ , vamos a ver que se verifica la alternativa (a).

Supongamos que  $(I - K)x = 0$ , de donde obtenemos que  $x = Kx$ , luego para todo  $i \geq 1$  tenemos que  $x = K^i x$ . Usando la cota puntual mencionada anteriormente vemos que converge a 0:

$$|x(t)| = |K^i x(t)| \leq (b-a) \|K\|^2 \sup |x| B(k)^{i-2} \rightarrow 0, \text{ cuando } i \rightarrow \infty$$

Por ello,  $x(t) = 0$  para todo  $t$ , es decir,  $x = 0 \in \mathcal{C}[a, b]$ .

Acabamos de verificar que  $\text{Ker}(I - K) = 0$ , lo cual demuestra la primera de las propiedades del teorema para  $K$  (donde se decía que  $\dim(\text{Ker}(I - K)) < \infty$ ).

Veamos que se cumple esta propiedad también para el caso en el que tenemos  $I - K^*$ .

$K^*$  es operador integral con el kernel  $K^*(t, s) = \overline{K(s, t)}$ , y como  $B(K^*) < 1$ , tenemos que se vuelve a cumplir la primera propiedad del teorema para  $K^*$ : tanto  $I - K$  como  $I - K^*$  son 1-a-1.

Sea  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  sabemos que la suma  $\sum_0^\infty K^i f = x$  (serie de Neumann) converge uniformemente en  $L_2$ . Así tenemos:

$$(I - K)x = \sum_0^\infty K^i f - K \sum_0^\infty K^i f = \sum_0^\infty K^i f - \sum_0^\infty K^{i+1} f = K^0 f = f$$

Esto demuestra que  $I - K$  es sobreyectiva y, por lo tanto, un isomorfismo.

Por un razonamiento similar tenemos que  $I - K^*$  es un isomorfismo.

En cuanto a la segunda y tercera propiedades del teorema, estas son triviales debido al hecho de que  $0^\perp = \mathcal{C}[a, b]$ .

### Parte 2:

Supongamos que  $K$  es un kernel degenerado. Esto quiere decir, aquellos que se pueden escribir como una suma finita de términos cada uno de los cuales es el producto de una función de  $t$  por una de  $s$ , tal y como se ve a continuación:

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \overline{\beta_i(s)}$$

Por otro lado, tenemos:

$$Kx = \sum_{i=1}^n \langle x, \beta_i \rangle \alpha_i$$

y como  $(I - K)x = 0 \Rightarrow x = Kx \in \langle \alpha_i \rangle$  tenemos que  $\dim \text{Ker}(I - K) \leq n < \infty$ .

De manera similar el adjunto se da por el kernel,

$$K^*(t, s) = \overline{K(s, t)} = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) \overline{\alpha_i(s)}$$

y con

$$K^*y = \sum_{i=1}^n \langle y, \alpha_i \rangle \beta_i$$

Empleando el mismo argumento que antes tenemos que  $Ker(I - K^*) \subseteq \langle \beta_i \rangle$  y que  $dim Ker(I - K^*) \leq n$ .

Queremos resolver  $(I - K)x = f$ . Descomponemos  $f = f_\beta + f_\perp$  donde definiremos  $f_\beta \in \langle \beta_i \rangle$  y  $f_\perp \in \langle \beta_i \rangle^\perp$ . Si desarrollamos da lugar a:

$$f_\beta = \sum_1^n \langle f, \beta_i \rangle \beta_i$$

$$f_\perp = f - f_\beta$$

Observemos que  $Kf_\perp = \sum_1^n \langle f_\perp, \beta_i \rangle \alpha_i = 0$ . Si existiera una solución de  $(I - K)x = f$  pondríamos  $x_\beta = x - f_\perp$ . Así:

$$f = (I - K)x = (I - K)x_\beta + (I - K)f_\perp, \text{ y al usar } Kf_\perp = 0,$$

$$(I - K)x_\beta = f_\beta = f - f_\perp$$

Si podemos resolver la ecuación anterior, pondremos  $x = x_\beta + f_\perp$  para resolver el problema  $(I - K)x = f$ . Así, se reduce el problema a un subespacio de dimensión finita (cuestión que simplifica los cálculos). De tal manera que  $X = \langle \alpha_i, \beta_i \rangle$  con  $T = I - K$ .

Ahora vamos a resolver  $(I - K)x_\beta = f_\beta$  dada  $f_\beta \in \langle \beta_i \rangle$ . La ecuación a resolver tomando el producto escalar con  $\beta_i$  queda:

$$x_\beta - \sum_{i=1}^n \langle x_\beta, \beta_i \rangle \alpha_i = f_\beta$$

$$\langle x_\beta, \beta_i \rangle - \sum_{j=1}^n \langle x_\beta, \beta_j \rangle \langle \alpha_j, \beta_i \rangle = \langle f_\beta, \beta_i \rangle$$

Si empleamos la siguiente notación:

$$x_i = \langle x_\beta, \beta_i \rangle = \langle x - f_\perp, \beta_i \rangle = \langle x, \beta_i \rangle \text{ con } \vec{x} = (x_i) \in \mathbb{C}^n$$

$$f_i = \langle f_\beta, \beta_i \rangle = \langle f - f_\perp, \beta_i \rangle = \langle f, \beta_i \rangle \text{ con } \vec{f} = (f_i) \in \mathbb{C}^n$$

$$A = (a_{ij}) = \langle \alpha_j, \beta_i \rangle \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

podemos decir que:

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = f_i, \text{ es decir } (I - A)\vec{x} = \vec{f}$$

Si resolvemos esta ecuación para  $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ , definiremos  $x_\beta = f_\beta + \sum x_i \alpha_i$ , lo cual nos permitirá resolver  $(I - K)x_\beta = f_\beta$ .

Como sabemos que los siguientes subespacios son de dimensión  $\leq n$ :

$$Ker(I - K) \subseteq \langle \alpha_i \rangle$$

$$Ker(I - K^*) \subseteq \langle \beta_i \rangle$$

Para evaluar  $(I - K^*)y$  con  $y = \sum_1^n y_i \beta_i \in \langle \beta_i \rangle$ , realizamos el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} (I - K^*)y &= \sum_i y_i \beta_i - \sum_j y_j K^* \beta_j = \\ &= \sum_i y_i \beta_i - \sum_j y_j \sum_i \langle \beta_j, \alpha_i \rangle \beta_i = \sum_i \left( \sum_j (\delta_{ij} - a_{ij}^*) y_j \right) \beta_i \end{aligned}$$

donde  $\vec{y} = (y_i) \in \mathbb{C}^n$ ,  $a_{ij}^* = \langle \beta_j, \alpha_i \rangle$ . De manera similar operaríamos para  $(I - K)x$ .

Para el caso  $f = 0 (= f_\beta = f_\perp)$ ,  $x_\beta = x$ , notamos las correspondencias 1-a-1:

$$\text{Ker}(I - K) \leftrightarrow \text{Ker}(I - A) \text{ y } \text{Ker}(I - K^*) \leftrightarrow \text{Ker}(I - A^*)$$

Por el segundo punto del lema que mencionamos anteriormente, tenemos que:

$$\dim \text{Ker}(I - A^*) = \dim \text{Ker}(I - A)$$

puesto que  $I - A^* = (I - A)^*$ . Por lo tanto,  $\dim \text{Ker}(I - K^*) = \dim \text{Ker}(I - K)$ . De esta manera queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Ahora vamos a demostrar los puntos 2 y 3 del teorema.

Sabemos que  $\text{Im}(I - K) \subseteq (\text{Ker}(I - K^*))^\perp$ . Para ver la inclusión inversa vamos a tomar  $f \in (\text{Ker}(I - K^*))^\perp$ . Acto seguido vamos a definir como antes  $f_i = \langle f, \beta_i \rangle$ ,  $\vec{f} = (f_i) \in \mathbb{C}^n$ ,  $f_\beta = \sum_i f_i \beta_i$  y  $f_\perp = f - f_\beta$ .

Consideramos un vector  $\vec{y} = (y_i) \in \text{Ker}(I - A^*)$  y definimos  $y = \sum_{i=1}^n y_i \beta_i \in \langle \beta_i \rangle$ . Entonces tenemos  $(I - K^*)y = 0$ , es decir,  $y \in \text{Ker}(I - K^*)$ , es más podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}, \vec{y} \rangle &= \sum_i f_i \bar{y}_i = \sum_i \langle f, \beta_i \rangle \overline{\langle y, \beta_i \rangle} = \\ &= \sum_i \langle f_\beta, \beta_i \rangle \langle \beta_i, y \rangle \text{ (porque } f = f_\beta + f_\perp) \\ &= \langle f_\beta, y \rangle \text{ (porque } f \in \langle \beta_i \rangle) \\ &= \langle f, y \rangle \text{ (porque } f_\perp \perp y) \\ &= 0 \text{ (porque } f \perp \text{Ker}(I - K^*) \text{ por hip.)} \end{aligned}$$

Así  $\vec{f} \in \text{Ker}(I - A^*)^\perp$  y por los puntos 2 y 3 del lema (y  $\dim \mathbb{C}^n < \infty$ ) deducimos que  $\vec{f} \in \text{Im}(I - A)$ .

Gracias a este hecho podemos resolver  $(I - A)\vec{x} = \vec{f}$ , y a su vez también encontrar la solución de  $(I - K)x_\beta = f_\beta$  para  $x_\beta$  y luego de  $(I - K)x = f$  para  $x$ , concluyendo así que  $f \in \text{Im}(I - K)$ .

Esto verifica que  $(\text{Ker}(I - K))^\perp \subseteq \text{Im}(I - K)$ . La contención inversa es nuevamente uno de los puntos del lema por lo que la afirmación 2 del teorema es cierta.

Por último, la tercera propiedad es idéntica a la segunda pero aplicándola a  $K^*$  en lugar de a  $K$ .

Parte 3:

En esta parte supondremos que no hay restricciones en el kernel continuo  $K(t, s)$ . Podemos encontrar un kernel degenerado  $K_0(t, s)$  con  $B(K - K_0) < 1$ . Por la parte 1 de la demostración aseguramos la existencia de una inversa tal que:

$$T = (I - (K - K_0))^{-1} : X \rightarrow X$$

donde  $X = \mathcal{C}[a, b]$ .

Ahora definimos  $\tilde{K} = TK_0 = (I - (K - K_0))^{-1}K_0$  y gracias a la expresión  $K_0x = \sum_{i=1}^n \langle x, \beta_i \rangle \alpha_i$  deducimos que:

$$\tilde{K}x = TK_0x = \sum_{i=1}^n \langle x, \beta_i \rangle T\alpha_i,$$

luego  $\tilde{K}$  también es degenerado.

Todo el truco de la demostración está en el siguiente cálculo:

$$I - \tilde{K} = TT^{-1} - TK_0 = T(T^{-1} - K_0) = T((I - (K - K_0)) - K_0) = T(I - K)$$

Notemos que  $T^*$  existe porque  $T = \sum_0^\infty (K - K_0)^i$  tiene un kernel integral. Por lo tanto  $T^*$  es también invertible, con  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ . Tenemos:

$$\begin{cases} T(I - K) = I - \tilde{K} \\ (I - K^*)T^* = I - \tilde{K}^* \end{cases}$$

de lo cual:

$$\begin{cases} Ker(I - \tilde{K}) = Ker(I - K) \\ Im(I - \tilde{K}) = TIm(I - K) \\ Ker(I - \tilde{K}^*) = (T^*)^{-1}Ker(I - K^*) \\ Im(I - \tilde{K}^*) = Im(I - K^*) \end{cases}$$

Como  $\tilde{K}$  es un operador de kernel degenerado, por la parte 2 de nuestra demostración sabemos que:

$$dimKer(I - \tilde{K}) = dimKer(I - \tilde{K}^*) < \infty$$

Por lo tanto:

$$dimKer(I - K) = dimKer(I - \tilde{K}) = dimKer(I - \tilde{K}^*) = dimKer(I - K^*)$$

lo cual demuestra la primera afirmación. También por la parte 2 aplicada a  $\tilde{K}$ , sabemos que  $Im(I - \tilde{K}) = (Ker(I - \tilde{K}^*))^\perp$ , luego:

$$\begin{aligned} Im(I - K) &= T^{-1}Im(I - \tilde{K}) = T^{-1}(Ker(I - \tilde{K}^*))^\perp = \\ &= (T^*Ker(I - \tilde{K}^*))^\perp = Ker(I - K^*)^\perp \end{aligned}$$

lo cual es la segunda afirmación del teorema. La tercera afirmación del teorema se sigue por la simetría entre  $K, K^*$ .

□

## CAPÍTULO 3

# Planteamiento del problema inverso de Calderón

---

Antes de comenzar con el planteamiento del problema vamos a situar su origen. El problema surgió a raíz de la técnica de formación de imágenes usada para obtener la conductividad eléctrica de un cuerpo a través de las mediciones de voltaje en la superficie de este. Dicha técnica se denomina Tomografía de Impedancia Eléctrica (EIT). Para llevar a cabo dichas mediciones se procede a inyecciones de corriente eléctrica con frecuencias y amplitudes distintas mediante el uso de electrodos situados en la superficie del cuerpo. Esta técnica (de un bajo coste) es usada en distintos ámbitos como en la medicina (empleada para la detección del cáncer de mama o la ubicación de focos epilépticos) o en la industria (localización de anomalías en estructuras).

Si lo trasladamos al ámbito matemático y como mencionamos anteriormente, el obtener la impedancia eléctrica de un cuerpo mediante las mediciones en la frontera es un problema no lineal y “mal planteado”. Este es el conocido “Problema inverso de Calderón” que lleva el nombre de quien lo planteó.

Es así como el problema se reduce a determinar la conductividad eléctrica  $\gamma(x)$  en cada punto  $x \in \Omega$ , donde  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  representa el cuerpo. Asumimos que dicho subconjunto es abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$  y que no hay sumideros o fuentes en  $\Omega$ . Denotaremos por  $f$  al potencial de voltaje medido en la frontera  $\partial\Omega$ , el cual a su vez induce un potencial de voltaje  $u$  en  $\Omega$ . Calderón propuso el siguiente problema para obtener la conductividad usando el operador de Dirichlet-to-Neumann:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \nabla(\gamma \nabla(u)) & \text{en } \Omega, \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Dado un  $\gamma(x)$  es positivo, existe una única solución débil  $u \in H^1(\Omega)$  para cualquier valor límite  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ , siendo  $H^1(\Omega)$  y  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  espacios de Sobolev. El problema resulta de determinar el valor de  $\gamma$  a partir de la aplicación aportada por Dirichlet-to-Neumann:

$$\Lambda_\gamma : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

$$(3.2) \quad \Lambda_\gamma f = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega}$$

donde  $\Lambda_\gamma(f)$  corresponde a la densidad de corriente de  $f$ . La aplicación de Dirichlet-to-Neumann se conoce a menudo como el “mapa de voltaje a corriente” para la ecuación de conductividad, como se aprecia en la ecuación 3.2. La interpretación física de  $\Lambda_\gamma$  es el conocimiento de las distribuciones de corrientes resultantes en el límite de  $\Omega$  que se corresponden a todas las posibles distribuciones de voltaje en el límite.

Calderón se pregunta lo siguiente: *¿Puede determinarse la conductividad eléctrica de  $\Omega$ ,  $\gamma(x)$ , haciendo mediciones de voltaje y corriente en la frontera?*

Calderón escogió una ruta de cara a la resolución del problema. Dicha ruta usa el teorema de divergencia, por el cual obtenemos:

$$(3.3) \quad Q_\gamma(f) := \int_\Omega \gamma |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial \Omega} \Lambda_\gamma(f) f dS$$

donde  $dS$  denota la medición en la superficie y  $u$  es la solución de 3.1. En otras palabras,  $Q_\gamma(f)$  es la **forma cuadrática asociada al mapa lineal**  $\Lambda_\gamma(f)$  y conocer  $\Lambda_\gamma(f)$  o  $Q_\gamma(f)$  para toda  $f \in H^{1/2}(\partial \Omega)$  es equivalente.

Vamos a demostrar que la igualdad de Calderón de la forma cuadrática asociada a la aplicación lineal es cierta.

*Demostración.* Suponemos una conductividad asintrópica, es decir, una conductividad que varía en función de la dirección en la que es examinada (puede presentar diferentes características según la dirección), en el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dado por una función simétrica positiva y semidefinida con valores de matriz:

$$\gamma = [\gamma^{ij}(x)]_{i,j=1}^n$$

En ausencia de fuentes o sumideros de corriente eléctrica, el potencial eléctrico  $u$  satisface:

$$\nabla \gamma \nabla u(x) = 0 \text{ (Problema de Dirichlet)}$$

$$\nabla \gamma \nabla u(x) = \nabla \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial x^k}(x) \right) = \nabla \left( \gamma^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x^k}(x) \right) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} (\alpha^{ij}(x)) \frac{\partial u}{\partial x^k}(x) = 0 \text{ en } \Omega$$

donde  $u = f$  en  $\partial \Omega$  con el voltaje prescrito  $f$  en el límite. La aplicación resultante de Dirichlet-to-Neumann (o una aplicación de voltaje a corriente) es definida por:

$$\Lambda_\gamma(f) = Bu \text{ en } \partial \Omega$$

$$\text{donde } Bu = \sum_{j=1}^n \nu_j \gamma^{jk} \partial_k u = \sum_{j=1}^n \nu_j \gamma^{jk} \frac{\partial u}{\partial x^k}(x)$$



con  $u$  como solución de  $\nabla\gamma\nabla u(x) = 0$  en  $\Omega$  y  $\nu$  es el vector normal unitario de  $\partial\Omega$ . Ha llegado el momento de aplicar el teorema de divergencia. El teorema decía lo siguiente: Sea  $V \subset \mathbb{R}^3$  y  $S = \partial V$ , orientado con la normal unitaria exterior  $n$ . Sea  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^k$ :

$$\int_V \nabla F = \int_S F n dS$$

Aplicando dicho teorema tenemos el siguiente resultado:

$$Q_\gamma(u|_{\partial\Omega}) = Q_\gamma(f) = \int_\Omega \gamma^{jk}(x) |\nabla u|^2 dx = \sum_{j,k=1}^n \int_\Omega \gamma^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x^j} \frac{\partial u}{\partial x^k} dx = \int_{\partial\Omega} \Lambda_\gamma(f) f dS$$

ya que debido al teorema de divergencia tenemos:

$$F = \gamma\nabla u(x) \rightarrow \nabla F = \nabla\gamma\nabla u(x) \text{ que es justo el problema de Dirichlet}$$

$$F n = \nu\gamma\nabla u(x) = \sum_{j=1}^n \nu_j \gamma^{jk} \frac{\partial u}{\partial x^k}(x) = \Lambda_\gamma(f)$$

□

Como acabamos de comprobar conocer  $Q_\gamma$  es equivalente a conocer la aplicación de Dirichlet-to-Neumann  $\Lambda_\gamma$ . Calderón estudia la aplicación:

$$Q : \gamma \rightarrow Q_\gamma$$

y demuestra que la derivada de Fréchet de esta aplicación (su aproximación lineal) en conductividades constantes es inyectiva. Más específicamente, considerando  $\gamma = 1$ , la **derivada de Fréchet** está dada por:

$$dQ_{\gamma=1} : \varphi \rightarrow dQ_{\gamma=1}\varphi$$

donde

$$(3.4) \quad dQ_{\gamma=1}\varphi(f, g) = \int_\Omega \varphi(x) \nabla u(x) \nabla \bar{v}(x) dx$$

donde  $u$  y  $v$  son las soluciones de 3.1 con dato frontera  $f$  y  $g$  respectivamente. Así Calderón demuestra que el problema linealizado es inyectivo al probar que el diferencial de Fréchet de  $Q_\gamma$  sobre  $\gamma = 1$  es inyectivo. Es así como demostrar que 3.4 es inyectivo es equivalente a demostrar que el producto de los gradientes de las funciones armónicas es denso en  $L^2(\Omega)$ , o lo que es lo mismo, si  $\int_\Omega \varphi(x) \nabla u(x) \nabla \bar{v}(x) = 0$  para funciones armónicas  $u$  y  $v$  con datos en  $\partial\Omega$  con  $f$  y  $g$  respectivamente, entonces  $\varphi = 0$ .

*Demostración.* Calderón considera las soluciones exponenciales complejas:

$$u = e^{x\rho}, v = e^{-x\rho} \quad \rho \in \mathbb{C}^n, \rho \cdot \rho = 0$$

Si  $\rho = m + ik$ , donde  $m, k \in \mathbb{R}^n$  con  $m \cdot k = 0$  y  $|m| = |k|$ , entonces  $\rho \cdot \rho = 0$ :

$$\rho \cdot \rho = (m + ik)(m + ik) = m^2 + 2ikm - k^2 = 2ikm = 0$$

Por otra parte:

$$\nabla u(x) = \rho e^{x\rho}, \quad \nabla \bar{v}(x) = -\bar{\rho} e^{-x\bar{\rho}} \quad \text{y} \quad \rho * \bar{\rho} = (m + ik)(m - ik) = 2|k|^2$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(x) \nabla u(x) \nabla \bar{v}(x) dx &= \int_{\Omega} \varphi(x) \rho e^{x\rho} (-\bar{\rho} e^{-x\bar{\rho}}) dx = \\ &= - \int_{\Omega} \varphi(x) \rho \cdot \bar{\rho} e^{x\rho - x\bar{\rho}} dx = -2|k|^2 \int_{\Omega} \varphi(x) e^{x\rho - x\bar{\rho}} dx = \\ &= -2|k|^2 \int_{\Omega} \varphi(x) e^{x(\rho - \bar{\rho})} dx = -2|k|^2 \int_{\Omega} \varphi(x) e^{2ikx} dx = 0 \end{aligned}$$

Lo que nos muestra que  $\widehat{\varphi_{X\Omega}}(k) = 0$  y, por lo tanto,  $\varphi = 0$ . □

Es así como Calderón demuestra que la derivada de Fréchet (primera aproximación) en conductividades constantes de la aplicación  $\gamma \rightarrow Q_\gamma$  es inyectiva. A continuación se trata el método de Nachmann para calcular la conductividad  $\gamma$ .

## CAPÍTULO 4

# El método de Nachman

---

Muchos de los avances hechos se deben a la construcción de las soluciones de la óptica geométrica para la ecuación en derivadas parciales. Vamos a proceder a la explicación del método de Nachman.

Antes de ver cuál es el procedimiento seguido, vamos a comprobar que  $\gamma$  tiene suficiente regularidad. La ecuación  $\nabla(\gamma\nabla u) = 0$  puede reducirse a la ecuación de Schrödinger para un potencial adecuado. Si  $u$  es solución de  $\nabla(\gamma\nabla u) = 0$  y llamamos  $\tilde{u} = \gamma^{1/2}u$ , tenemos que:

$$\nabla(\gamma\nabla u) = 0 \iff \nabla(\gamma\nabla(\gamma^{-1/2}\tilde{u})) = 0 \text{ porque } u = \gamma^{-1/2}\tilde{u}$$

$$\nabla(\gamma\nabla(\gamma^{-1/2}\tilde{u})) = \nabla(\gamma\nabla(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\tilde{u})) = 0$$

$$\nabla(\gamma\nabla(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\tilde{u})) = \nabla(\gamma(\nabla(\frac{1}{\sqrt{\gamma}})\tilde{u} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\nabla(\tilde{u}))) = \nabla(\gamma\nabla(\frac{1}{\sqrt{\gamma}})\tilde{u} + \sqrt{\gamma}\nabla(\tilde{u})) = 0 \quad (*)$$

Para continuar vamos a utilizar que  $\gamma\nabla(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}) = -\nabla(\sqrt{\gamma})$ . Vemos que esto es cierto:

*Demostración.*

$$\nabla(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}) = -\frac{1}{2}\gamma^{-\frac{3}{2}}\nabla(\gamma) \Rightarrow \gamma\nabla(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}) = -\frac{1}{2}\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla(\gamma) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\nabla(\gamma)$$

$$-\nabla(\sqrt{\gamma}) = -\nabla(\gamma^{\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla(\gamma) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\nabla(\gamma)$$

□

Continuando con (\*) y usando el resultado anterior:

$$\begin{aligned} \nabla(\gamma\nabla(\frac{1}{\sqrt{\gamma}})\tilde{u} + \sqrt{\gamma}\nabla(\tilde{u})) &= \nabla(-\nabla(\sqrt{\gamma})\tilde{u} + \sqrt{\gamma}\nabla(\tilde{u})) = \nabla(\sqrt{\gamma}\nabla(\tilde{u}) - \nabla(\sqrt{\gamma})\tilde{u}) = \\ &= \nabla(\sqrt{\gamma})\nabla(\tilde{u}) + \nabla^2(\tilde{u})\sqrt{\gamma} - \nabla^2(\sqrt{\gamma})\tilde{u} - \nabla(\sqrt{\gamma})\nabla(\tilde{u}) = \nabla^2(\tilde{u})\sqrt{\gamma} - \nabla^2(\sqrt{\gamma})\tilde{u} = \\ &\gamma^{-\frac{1}{2}}\Delta(\tilde{u}) - \tilde{u}\Delta(\gamma^{-\frac{1}{2}}) = 0 \Rightarrow \Delta\tilde{u} - q(x)\tilde{u} = 0 \text{ si } q(x) = \frac{\Delta(\gamma^{\frac{1}{2}})}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Es así como deducimos que a la hora de construir soluciones para la ecuación  $\nabla(\gamma\nabla u) = 0$ , será suficiente con construirlas para la ecuación de Schrödinger con el potencial indicado:

$$(4.1) \quad (\Delta - q)\tilde{u} = (-\Delta + q)\tilde{u} = 0 \quad \text{con} \quad q = \frac{\Delta(\gamma^{1/2})}{\gamma^{1/2}}$$

El método de Nachman usa la aplicación de Dirichlet-to-Neumann 3.2 para calcular la transformación de scattering del potencial  $q$  de Schrödinger, considerado como un potencial en  $\mathbb{R}^2$  extendiéndose a 0 fuera de  $\Omega$  y recuperar  $\gamma$  de la transformada de scattering.

El potencial  $q$  tiene  $\sqrt{\gamma}$  como su solución de estado fundamental si ampliamos de manera similar  $\gamma(x)$  ajustando  $\gamma(x) = 1$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ .

Los métodos conocidos en la transformada de scattering bidimensional de Schrödinger permiten recuperar las funciones propias de scattering (y, por lo tanto, el estado fundamental) de los datos de dispersión resolviendo un problema. Más precisamente, dado el potencial  $q$ , se calcula la transformada de scattering  $t$  a partir de las soluciones de óptica geométrica compleja (CGO) de Faddeev de la ecuación de Schrödinger.

Para definir las soluciones CGO introducimos un parámetro complejo  $k$  y buscamos las soluciones  $\psi(z, k)$  de la ecuación de Schrödinger (procedente del resultado de 4.1):

$$(4.2) \quad (-\Delta + q)\psi(*, k) = 0$$

que satisfagan la condición asintótica:

$$(4.3) \quad e^{-ikx}\psi(*, k) - 1 \in W^{1, \tilde{p}} \text{ para cualquier } 2 < \tilde{p} < \infty$$

El espacio  $W^{1, \tilde{p}}$  es un caso especial de la definición:

$$W^{m,p}(E) = \{f \in L^p(E) \mid \partial^\alpha f \in L^p(E), |\alpha| \leq m\}$$

para un dominio arbitrario  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $m \geq 0$ .

Denotemos:

$$(4.4) \quad \mu(x, k) := e^{-ikx}\psi(x, k) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{C} \setminus 0$$

y la condición  $\mu - 1 \in W^{1, \tilde{p}}$  junto con el teorema de inclusión de Sobolev 2.1 concluye que  $\mu$  es continua y tiende a 1 asintóticamente cuando  $|x| \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{-ikx}\psi(x, k) - 1 = 0$$

Notemos que la función  $\psi(x, k)$  es asintótica a la función de crecimiento exponencial  $e^{ikx}$  en el sentido de 4.3. Por lo tanto, es conveniente definir una función limitada, como hemos hecho con  $\mu(x, k) := e^{-ikx}\psi(x, k)$  y construir  $\mu$  para poder obtener  $\psi$  de la fórmula  $\psi(x, k) = e^{ikx}\mu(x, k)$ .

Usando 4.2 y 4.4 obtenemos el siguiente resultado.

$$\begin{aligned} (-\Delta + q)e^{ikx}\mu(x, k) = 0 &\rightarrow q(x)e^{ikx}\mu(x, k) = \Delta\mu(x, k)e^{ikx} = \Delta\psi(x, k) \\ q(x)e^{ikx}\mu(x, k) = \Delta\psi(x, k) &= 4\partial\bar{\partial}(e^{ikx}\mu(x, k)) = 4\partial(e^{ikx}\bar{\partial}\mu(x, k)) = \\ &= 4(ik e^{ikx}\bar{\partial}\mu(x, k) + e^{ikx}\partial\bar{\partial}\mu(x, k)) = e^{ikx}(4ik\bar{\partial} + \Delta)\mu(x, k) \end{aligned}$$

Así que:

$$q(x)e^{ikx}\mu(x, k) = e^{ikx}(4ik\bar{\partial} + \Delta)\mu(x, k) \Rightarrow (-\Delta - 4ik\bar{\partial} + q(x))\mu(x, k) = 0$$

La reconstrucción de  $\gamma$  se basa en el uso de un objeto intermedio llamado la **transformada de scattering no física t** (*nonphysical scattering transform*), que no es directamente medible en los experimentos. Viene definida por:

$$t(k) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\bar{k}x} q(x) \psi(x, k) dx$$

o equivalentemente:

$$(4.5) \quad t(k) := \int_{\mathbb{R}^2} e_k(x) q(x) \mu(x, k) dx$$

donde la función exponencial  $e_k$  satisface  $|e_k(x)| = 1$  y viene dada por:

$$e_k(x) := e^{i(kx + \bar{k}x)} = e^{-i(-2k_1, 2k_2)(x_1, x_2)}$$

Como  $\mu$  es asintóticamente 1, la sustitución de  $e_k(x)$  en 4.5 es aproximadamente la transformada de Fourier de  $q$  evaluada en  $(-2k_1, 2k_2)$ .

Una vez vistas estas nociones previas, vamos a el procedimiento o metodología de Nachman, el cual podemos dividir en los siguiente pasos:

1. Partiendo de  $\Lambda_\gamma$  a  $\psi|_{\partial\Omega}$  usando ecuación integral de límites.
2. De  $\psi|_{\partial\Omega}$  a  $t$  mediante la integración en el límite.
3. Una vez tenemos  $t$  conseguir  $\mu$  mediante la ecuación D-bar.
4. Por último, de  $\mu$  obtener  $\gamma$ .

#### 4.1. De $\Lambda_\gamma$ a $\psi|_{\partial\Omega}$ usando ecuación integral de límites

Sabemos que  $\Lambda_\gamma$  es el mapa de Dirichlet-to-Neumann que definimos en 3.2, ahora bien, la pregunta que surge es: ¿cómo se relacionan el mapa de Dirichlet-to-Neumann y  $\psi|_{\partial\Omega}$  y  $t(k)$ ?

Para poder explicar la relación entre las distintas funciones hemos de introducir la conocida como *Identidad de Alessandrini* que enunciaremos a continuación y teniendo en cuenta que dicho análisis usa la aplicación de Dirichlet-to-Neumann  $\Lambda_q$  de la ecuación de Schrödinger definido para funciones  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  por:

$$\Lambda_q f := \frac{\partial v}{\partial \nu} |_{\partial\Omega}$$

donde la función  $v \in H^1(\Omega)$  es la única solución del problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} (-\Delta + q)v = 0 \text{ en } \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

**Teorema 4.1. (Identidad de Alessandrini).** Para dos soluciones cualesquiera  $v_l \in H^1(\Omega)$ ,  $l = 1, 2$  de:

$$\begin{cases} (-\Delta + q)v = 0 \text{ en } \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

se cumple la siguiente identidad:

$$\int_{\Omega} (q_1 - q_2)v_1 v_2 dx dy = \int_{\partial\Omega} v_1 (\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}) v_2 ds$$

*Demostración.* De  $(-\Delta + q_l)v_l = 0$  en  $\Omega$  tenemos que:

$$\int_{\Omega} (v_2(\Delta v_1 - q_1 v_1) - v_1(\Delta v_2 - q_2 v_2)) dx dy = \int_{\Omega} v_2 \Delta v_1 - q_1 v_1 v_2 - v_1 \Delta v_2 + v_1 q_2 v_2 = 0$$

Reordenamos términos y aplicamos el teorema de Green:

$$(4.6) \quad \int_{\Omega} (q_1 - q_2)v_1 v_2 dx dy = \int_{\Omega} (v_2 \Delta v_1 - v_1 \Delta v_2) dx dy =$$

$$(4.7) \quad = \int_{\partial\Omega} (v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \nu}) ds = \int_{\partial\Omega} (v_2 \Lambda_{q_1} v_1 - v_1 \Lambda_{q_2} v_2) ds$$

Considerando ahora el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} (-\Delta + q_1)w = 0 \text{ en } \Omega, \\ w = v_2 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

Haciendo lo mismo que en el paso anterior tenemos:

$$0 = \int_{\Omega} (v_1(\Delta w - q_1 w) - w(\Delta v_1 - q_1 v_1)) dx dy = \int_{\Omega} (v_1 \Delta w - w \Delta v_1) dx dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left( v_1 \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v_1}{\partial \nu} \right) ds = \int_{\partial\Omega} (v_1 \Lambda_{q_1} w - w \Lambda_{q_1} v_1) ds = \int_{\partial\Omega} (v_1 \Lambda_{q_1} v_2 - v_2 \Lambda_{q_1} v_1) ds$$

Con lo que vemos que:

$$\int_{\partial\Omega} v_2 \Lambda_{q_1} v_1 ds = \int_{\partial\Omega} v_1 \Lambda_{q_1} v_2 ds$$

Ahora si juntamos este resultado con el obtenido en 4.6 tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (q_1 - q_2) v_1 v_2 dx dy &= \int_{\partial\Omega} (v_2 \Lambda_{q_1} v_1 - v_1 \Lambda_{q_2} v_2) ds = \\ &= \int_{\partial\Omega} (v_1 \Lambda_{q_1} v_2 - v_1 \Lambda_{q_2} v_2) ds = \int_{\partial\Omega} (v_1 (\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}) v_2) ds \end{aligned}$$

□

Después de este pequeño inciso, retomamos la construcción de las soluciones  $\psi$ , basadas en la definición de  $\psi(x, k) = e^{ikx} \mu(x, k)$ . Las funciones  $\mu$  son definidas usando la ecuación Lippmann-Schwinger-type:

$$(4.8) \quad \mu = 1 - g_k * (q\mu)$$

que da una solución formal a la expresión que sacamos previamente (con la condición asintótica deseada):

$$(-\Delta - 4ik\bar{\partial} + q(x))\mu(x, k) = 0$$

Solo hemos de aplicar  $-\Delta - 4ik\bar{\partial}$  a ambos lados de 4.8. La ecuación 4.8 es la ecuación de Fredholm de segundo tipo en el espacio  $W^{1,\dot{p}}(\mathbb{R}^2)$ . La convolución en  $\mu = 1 - g_k * (q\mu)$  viene dada por:

$$(h * f)(z) := \int_{\mathbb{R}^2} h(z - w) f(w) dw_1 dw_2$$

Volviendo a 4.8 con  $e^{ikx}$  tenemos que:

$$\psi(x, k) = e^{ikx} - g_k(x) e^{ikx} = e^{ikx} (1 - g_k(x)) = e^{ikx} - G_k * (q\psi)$$

$$(4.9) \quad \psi(x, k) = e^{ikx} - G_k * (q\psi)$$

donde  $\psi(x, k) = e^{ikx} \mu(x, k)$  y con  $G_k = g_k(x) e^{ikx}$  que es la función de Faddeev Green para el Laplaciano. Si partimos de este hecho y cogemos:

$$\begin{cases} q_2 = q = \gamma^{-1/2} \Delta \gamma^{1/2} = \frac{\Delta \gamma^{1/2}}{\gamma^{1/2}} \\ v_2 = \psi(*, k) \\ q_1 = 0 \\ v_1 = G_k(x - \xi) \text{ con } \xi \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

y sustituimos en la identidad de Alessandrini obtenemos el siguiente resultado:

$$\int_{\partial\Omega} G_k(x-\xi)(\Lambda_0-\Lambda_q)\psi(*,k)|_{\partial\Omega}ds(\xi) = - \int_{\Omega} G_k(x-\xi)q(\xi)\psi(\xi,k)d\xi = -e^{ikx} + \psi(x,k)$$

La última igualdad la hemos obtenido de 4.9 y de la definición de convolución. Es así como si cogemos  $x \rightarrow \partial\Omega$  en el resultado que acabamos de obtener, resulta en la ecuación de integral límite:

$$\psi(*,k)|_{\partial\Omega} = e^{ikx}|_{\partial\Omega} - \delta_k((\Lambda_q - \Lambda_0)\psi(*,k))$$

donde el operador de la caja única de Faddeev es:

$$(\delta_k\phi)(x) := \int_{\partial\Omega} G_k(x-\xi)\phi(\xi)ds(\xi)$$

Vemos que  $\psi(*,k)|_{\partial\Omega}$  no involucra la medición EIT de precisión infinita  $\Lambda_\gamma$  más bien el operador abstracto  $\Lambda_q$ . La relación  $q = \frac{\Delta\gamma^{1/2}}{\gamma^{1/2}}$  permite derivar una relación entre los mapas  $\Lambda_\gamma$  y  $\Lambda_q$ . Denotemos por  $u$  la solución del problema de Dirichlet 3.1 y sea  $v$  la solución a la ecuación de Schrödinger, entonces  $v = \gamma^{1/2}u$  y:

$$\Lambda_q f = \frac{\partial v}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} = \gamma^{-1/2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma}{\partial\nu} + \Lambda_\gamma\right)\gamma^{-1/2}f$$

y en nuestra suposición de que  $\gamma = 1$  cerca de  $\partial\Omega$  implica que:

$$\Lambda_q = \Lambda_\gamma$$

Y sustituyendo en  $\psi(*,k)|_{\partial\Omega}$  tenemos:

$$\psi(*,k)|_{\partial\Omega} = e^{ikz}|_{\partial\Omega} - \delta_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)\psi(*,k)$$

Es así como obtenemos una expresión para  $\psi|_{\partial\Omega}$  a partir de  $\Lambda_\gamma$ .

## 4.2. De $\psi|_{\partial\Omega}$ a $t$ mediante la integración en el límite

El objetivo es conseguir la transformada de scattering del potencial  $q$  de Schrödinger dada por  $t$ .

Para ello, escogiendo  $q_1 = q = \gamma^{-1/2}\Delta\gamma^{1/2}$ ,  $v_1 = \psi(*,k)$ ,  $q_2 = 0$  y  $v_2 = e^{i\bar{k}\bar{x}}$  en la transformada de scattering del potencial  $q$  de Schrödinger,  $t(k)$ , para Dirichlet-to-Neumann:

$$(4.10) \quad t(k) = \int_{\Omega} q(x)e^{i\bar{k}\bar{x}}\psi(x,k)dxdy = \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}\bar{x}}(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)\psi(*,k)ds$$

Hemos usado la identidad de Alessandrini definida anteriormente 4.1 para así obtener  $t(k)$  a partir de  $\psi(*,k)$ .



### 4.3. De $t$ obtener $\mu$ mediante la ecuación de D-bar

Las soluciones CGO  $\mu(x, k) = e^{-ikx}\psi(x, k)$  están parametrizadas por números complejos. Es natural preguntarse si la  $k$ -dependencia en  $\mu(x, k)$  es analítica-compleja, pero analíticamente es equivalente a  $\bar{\partial}_k\mu(x, k)$  y  $\bar{\partial}_k = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$  con  $k = x + iy$  siendo cero.

Si derivamos la ecuación de Lippmann-Schwinger 4.8 con respecto a  $\bar{k}$  resulta que obtenemos una ecuación que involucra a la transformada de scattering  $t$ :

$$(4.11) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{k}}\mu(x, k) = \frac{1}{4\pi\bar{k}}t(k)e_{-k}(x)\overline{\mu(x, k)}$$

E así como el mapeo  $k \rightarrow \mu(x, k)$  no es analítico sino pseudoanalítico. Es importante señalar que  $x \in \mathbb{R}^2$  es un parámetro fijo y la ecuación está sobre la variable  $k \in \mathbb{C}$ . Esta solución es la única bajo la suposición adicional sobre su comportamiento asintótico:

$$\mu(x, k) - 1 \in L^r \cap L^\infty(\mathbb{C})$$

para algún exponente de Lebesgue  $r > 2$ .

El método de prueba es constructivo y utiliza un análogo al de Lippmann-Schwinger 4.8. La solución fundamental para  $\bar{\partial}_k$  es  $\frac{1}{\pi k}$ . Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera (complejo-analítico en la totalidad de  $\mathbb{C}$ ) y denotamos:

$$T_x(k) := \frac{t(k)}{4\pi k}e_{-k}(x)$$

Aplicando  $\bar{\partial}_k$  a ambos lados tenemos que:

$$\mu = f - \frac{1}{\pi k} * (T_x\bar{\mu})$$

Podemos observar que cualquier  $\mu$  solución de esta ecuación lo es también de 4.11. Ahora si sustituimos  $f = 1$  en la ecuación anterior da una solución que satisface el comportamiento asintótico de  $\mu(x, k) - 1 \in L^r \cap L^\infty(\mathbb{C})$ .

Si desarrollamos la expresión y lo escribimos de una manera más explícita, tenemos que para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  fijo la solución de 4.11 y  $\mu(x, k) - 1 \in L^r \cap L^\infty(\mathbb{C})$  puede ser expresado como la solución de:

$$(4.12) \quad \mu(x, k) = 1 + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{t(k')}{(k - k')\bar{k}'} e_{-x}(k') \overline{\mu(x, k')} dk'_1 dk'_2$$

que es una ecuación de Fredholm de segundo orden y tiene solución única.

#### 4.4. De $\mu$ obtener $\gamma$ .

Observamos que cogiendo  $k \rightarrow 0$  en  $\Delta\mu(x, k) - 4ik\bar{\partial}\mu(x, k) = q(x)\mu(x, k)$  y usado que  $q = \frac{\Delta\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}$  implica que:

$$(4.13) \quad -\Delta\mu(x, 0) = \frac{\Delta\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\mu(x, 0)$$

Ahora si usamos que  $\gamma(x) = 1$  para  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  vemos que:

$$\mu(x, 0) = \gamma^{1/2}(x)$$

que satisface 4.13 y la condición de  $\mu(*, 0) - 1 \in W^{1, \hat{p}}(\mathbb{R}^2)$ . Así podemos usar  $\mu(x, 0) = \gamma^{1/2}(x)$  para recuperar  $\gamma$  directamente de  $\mu$  en 4.12 tal que:

$$\gamma^{1/2}(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \mu(x, k)$$

## CAPÍTULO 5

# Problema Inverso de Calderón en Redes Neuronales

---

### 5.1. Dirichlet-to-Neumann en un disco con un potencial radial de un paso

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un dominio acotado con una frontera  $\partial\Omega$ . Para cada  $q \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  consideramos la aplicación de Dirichlet-to-Neumann (a la cual nos referiremos de manera acotada como DtN), que basándonos en 3.2 tenemos:

$$\Lambda_q : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$$
$$f \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}$$

donde  $u$  es la solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta u + q(x)u = 0, x \in \Omega \\ u = f \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

Una condición suficiente para garantizar que  $\Lambda_q$  está bien definida es asumir que  $q(x) < \lambda_1$  (el primer autovalor de Dirichlet del operador de Laplace en  $\Omega$ ), ya que en este caso la solución sería única.

Supongamos que se cumple dicha condición, entonces podemos definir el espacio:

$$\mathcal{L}_{<\lambda_1}^\infty(\Omega) = \{q \in \mathcal{L}^\infty(\Omega), \text{ tal que } q(x) < \lambda_1\}$$

Nos vamos a centrar en la aplicación:

$$\Lambda : \mathcal{L}_{<\lambda_1}^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega); H^{-1/2}(\partial\Omega))$$

$$q \rightarrow \Lambda_q$$

El objetivo consiste en recuperar el potencial  $q$  a partir de mediciones en el límite o frontera. En la práctica, dichas mediciones de contorno corresponden a la aplicación DtN asociada, por lo que el problema matemático consiste en la inversión de  $\Lambda$ .

Vamos a comprobar el rendimiento de métodos de clasificación, en particular, de las redes neuronales, para distinguir potenciales de los datos de DtN. Consideramos el caso simple del disco con potenciales radiales de un paso  $q$ . Más precisamente, restringiremos al caso particular de  $\Omega = B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : r = |x| < 1\}$  junto con  $q \in F \subseteq \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  potenciales radiales dados por:

$$F = \{q \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) : q(r) = \gamma \chi_{(0,b)}(r), r = |x|, b \in (0, 1), \gamma \in [0, 1]\}$$

donde  $\chi_{(0,b)}(r)$  es la función característica del intervalo  $(0, b)$ . Notemos que  $F$  es una familia de funciones que depende de dos parámetros,  $\gamma$  y  $b$ .

Vamos a considerar dos tipos de potenciales:

1. Clase A: para aquellos  $\gamma \sim 1$  y  $b \in (0,01, 0,99)$ .
2. Clase B: para aquellos  $\gamma \sim 2$  y  $b \in (0,01, 0,99)$ .

Por lo que los potenciales de la clase A son potenciales con un solo salto de tamaño 1, mientras que los de clase B tienen un salto mayor (alrededor de 2). La cuestión que nos planteamos es: “¿Pueden los algoritmos de clasificación identificar si un potencial está en la clase A o B a partir de los datos de la aplicación DtN?”

Para responder a la pregunta lo primero que hacemos es pasar el sistema 5.1 a coordenadas polares tal y como sigue:

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + r^2 q(r)v = 0, \text{ con } (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi), \\ \lim_{r \rightarrow 0, r > 0} v(r, \theta) < \infty, \\ v(1, \theta) = g(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

donde  $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$  y  $g(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$  que es una función periódica. Una base ortonormal en  $\mathcal{L}^2(0, 2\pi)$  viene dada por  $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ . Aquí usamos esta base compleja para simplificar la notación, pero en el análisis siguiente consideraremos el subespacio de funciones con valor real. Así, cualquier función  $g \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$  podemos escribirla como:

$$g(\theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_n e^{in\theta} \quad \text{y} \quad \|g\|_{\mathcal{L}^2(0, 2\pi)}^2 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |g_n|^2$$

Asociado a esta base definimos el espacio usual de Hilbert  $H_{\#}^\alpha$ , para  $\alpha > 0$  como:

$$H_{\#}^\alpha = \{g : \|g\|_\alpha^2 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n^{2\alpha} |g_n|^2 < \infty\}$$

Es fácil ver que  $H_{\#}^\alpha$  es el espacio de funciones periódicas en  $H^\alpha(0, 2\pi)$  para  $\alpha > 0$  y  $H_{\#}^{-\alpha}$  es el espacio dual del  $H_{\#}^\alpha$ . En este caso la aplicación de Dirichlet-to-Neumann queda definida como:

$$\Lambda_q : H_{\#}^{1/2}(0, 2\pi) \rightarrow H_{\#}^{-1/2}(2\pi)$$

$$g \rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega}$$

En la base anterior la aplicaci

$$\Lambda_q : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

$$f \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}$$

on de Dirichlet-to-Neumann resulta ser diagonal. Así, podremos usar el siguiente teorema.

**Teorema 5.1.** *Sea  $\Omega$  el disco unidad y  $q \in F$ . Entonces:  $\Lambda_q(e^{in\theta}) = c_n e^{in\theta}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , donde:*

$$c_0 = \frac{-b\sqrt{\gamma}J_1(\sqrt{\gamma}b)}{b \log b\sqrt{\gamma}J_1(\sqrt{\gamma}b) + J_0(\sqrt{\gamma}b)}$$

$$c_n = c_{-n} = n \frac{J_{n-1}(\sqrt{\gamma}b) - b^{2n}J_{n+1}(\sqrt{\gamma}b)}{b^n(\frac{1}{b^n}J_{n-1}(\sqrt{\gamma}b) + b^nJ_{n+1}(\sqrt{\gamma}b))}, \quad n \in \mathbb{N}$$

con  $J_n(r)$  siendo las funciones de Bessel de primer tipo.

Vamos a realizar un estudio de los datos de los grupos A y B. Antes de aplicar la red neuronal al problema de clasificación, miramos la información de la aplicación  $\Lambda_q$ , es decir, los coeficientes  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  cuando tomamos potenciales. Primero de todo cogemos una muestra aleatoria de 1000 potenciales con  $b \in \mathbb{U}([0,1, 0,9])$  y  $\gamma \in \mathbb{U}([1, 2])$  y obtenemos una matriz de covarianzas parecida a la siguiente (decimos “parecida” porque los datos al generarse de manera aleatoria cambiarán de valores, pero no variará el comportamiento de la matriz):

$$\begin{pmatrix} 0,0959 & 0,0325 & 0,0127 & 0,0070 & 0,0044 & 0,0030 \\ * & 0,0121 & 0,0050 & 0,0028 & 0,0019 & 0,0013 \\ * & * & 0,0021 & 0,0012 & 0,0008 & 0,0006 \\ * & * & * & 0,0007 & 0,0005 & 0,0004 \\ * & * & * & * & 0,0002 & 0,0001 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos comprobar hemos calculado los coeficientes desde  $c_0$  hasta  $c_5$  (ambos inclusive). Además comprobamos que la diagonal decrece, lo que implica que cada vez hay menos variación en los coeficientes. Por otra parte, en cada fila los datos decrecen debido a la escasa varianza de los coeficientes altos, información que deducimos de la siguiente matriz de correlaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,9529 & 0,8861 & 0,8262 & 0,7754 & 0,7323 \\ * & 1 & 0,9828 & 0,9508 & 0,9161 & 0,8825 \\ * & * & 1 & 0,9912 & 0,9724 & 0,9499 \\ * & * & * & 1 & 0,9946 & 0,9823 \\ * & * & * & * & 1 & 0,9964 \\ * & * & * & * & * & 1 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar al fijarnos en las filas de nuestra matriz de correlaciones, la correlación se va perdiendo a medida que tomamos coeficientes más separados (claramente la correlación más pequeña es la que existe entre  $c_0$  y  $c_5$ ).

Debido a este estudio de los datos, elegiremos  $c_0$  y  $c_1$  para estudiar la aplicación de DtN, dado que son los dos que presentan una varianza mayor y, por tanto, nos proporcionarán más información de cara al desarrollo de la red neuronal.

De cara a la programación y generación de la muestra de datos para el problema de clasificación, estos se han obtenido de la siguiente manera para cada una de las clases:

1. Potenciales de la clase A: creamos una muestra de 500 potenciales con  $b \in \mathcal{U}([0,01, 0,99])$  y  $\gamma \in \mathcal{N}(1; 0,05)$  (Normal de media 1 y desviación típica 0.05).
2. Potenciales de la clase B: creamos una muestra de 500 potenciales con  $b \in \mathcal{U}([0,01, 0,99])$  y  $\gamma \in \mathcal{N}(2; 0,05)$  (Normal de media 2 y desviación típica 0.05).

La red neuronal que hemos implementado para la clasificación de este problema obtiene alrededor de un 80% de acierto. Dicha red neuronal ha sido implementada en python y empleando la clase “MLPClassifier()”. Dicha clase pertenece a la librería de Scikit-Learn. Vamos a usar los parámetros por defecto, salvo el número de iteraciones (donde usaremos 2000 iteraciones para que converja) y “random state” (determina la generación de números aleatorios para las ponderaciones). El resto de parámetros por defecto establecidos son:

1. Una capa oculta con 100 neuronas.
2. Función de activación “ReLU” (devuelve  $f(x) = \max(0, x)$ ).
3. Optimizador “Adam” (optimizador estocástico).
4. Tasa de aprendizaje de 0.001.
5. Batch size igual a 200 (salvo que haya menos muestras, en cuyo caso el batch será igual al número de ellas).

Posteriormente a la instanciación del modelo, procedemos a su entrenamiento y por último vemos su predicción. La ventaja del empleo de esta clase es que nos permite obtener toda la información acerca del modelo creado como, por ejemplo, los coeficientes y los interceptores.

Si empleamos la red neuronal previamente explicada y no hacemos una criba de los valores de  $c_0$  y  $c_1$ , obtenemos la siguiente gráfica:

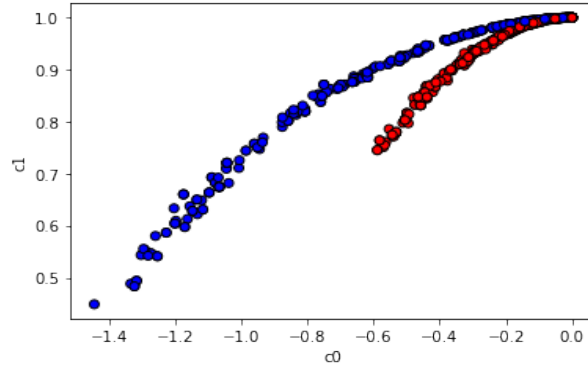


Figura 5.1: Clasificación en función de  $c_0$  y  $c_1$  con un 80 % de acierto (aprox.)

Como podemos apreciar en dicha gráfica si  $c_0 > -0,3$  los valores entre las dos clases se superponen lo que implica que la probabilidad de clasificar correctamente los datos de esa franja sea de un 50 % (misma probabilidad que la de acertar la cara de una moneda). Es por ello que si usamos estos datos “cribados” obtenemos un 100 % de acierto como vemos en la siguiente gráfica:

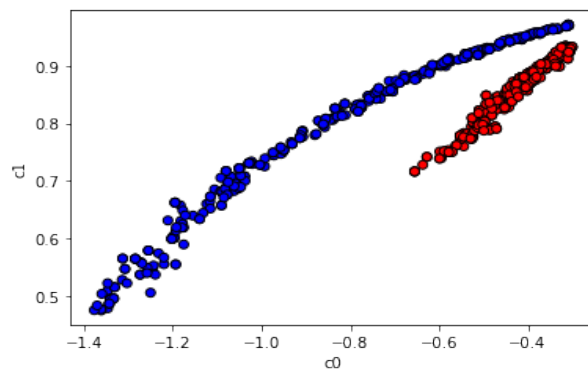


Figura 5.2: Clasificación en función de  $c_0$  y  $c_1$  con un 100 % de acierto y  $c_0$  acotado.

Si probamos con otros autovalores que no sean el par formado por  $c_0$  y  $c_1$ , obtenemos una menor tasa de acierto. Esto se debe a que la varianza de los siguientes autovalores es menor que el par escogido previamente, es decir, que la cantidad de información que contienen es menor, por lo que a la hora de clasificar lo harán con un acierto menor. A continuación se muestra la clasificación con los distintos autovalores y su porcentaje de acierto:

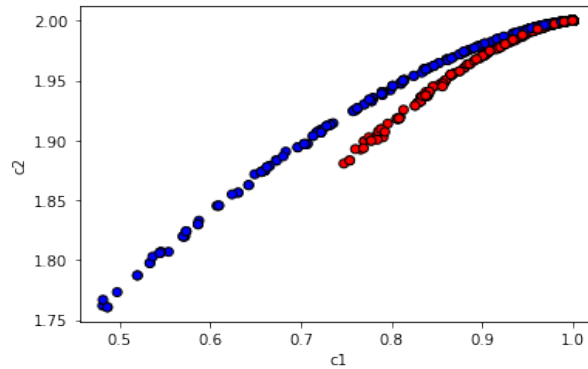


Figura 5.3: Clasificación en función de  $c_1$  y  $c_2$  con un 60% de acierto (aprox.)

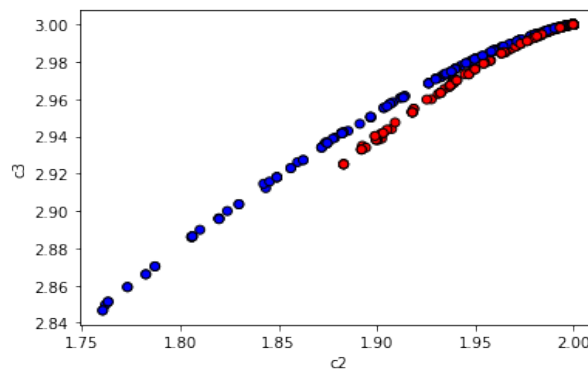


Figura 5.4: Clasificación en función de  $c_2$  y  $c_3$  con un 50% de acierto (aprox.)

## 5.2. Transformada de Fourier en un disco con un potencial radial de un paso

Como mencionamos en secciones anteriores, la transformada de scattering (4.5) es aproximadamente la transformada de Fourier, pero definida en unos límites distintos. Este motivo ha sido el impulsor a realizar un estudio de cuál es la tasa de acierto de una red neuronal basada en las primeras derivadas de la transformada de Fourier. Por otro lado, teníamos que la aplicación de Dirichlet-to-Neumann era muy parecida a la transformada de scattering. De esta manera, dado que el cálculo computacional de la transformada de scattering es mucho más complejo que el de la transformada de Fourier, es por ello que escogeremos esta última para realizar el estudio y poder comparar con los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Dado que como hemos mencionado la transformada de scattering se considera que es prácticamente igual a la transformada de Fourier, de hecho se la conoce también con el nombre de la 'transformada de Fourier no lineal', vamos a crear nuestra red neuronal sobre la transformada de Fourier.



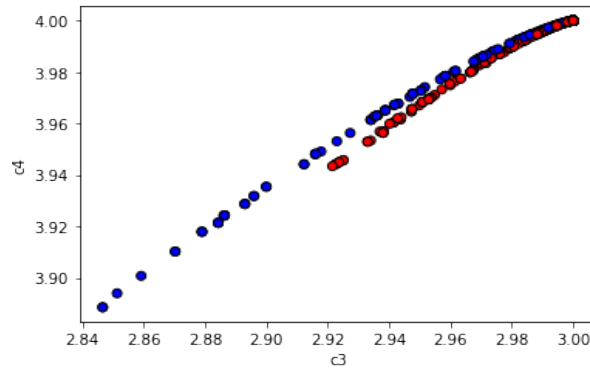


Figura 5.5: Clasificación en función de  $c_3$  y  $c_4$  con un 50 % de acierto (aprox.)

Los datos empleados para entrenar la red neuronal y con los cuales vamos a probar el funcionamiento y la tasa de acierto de la red son los mismos que se usaron en la sección anterior. La motivación de esto no es otra que la de poder comparar los resultados finales de nuestras dos redes neuronales con una mayor objetividad y precisión. La diferencia con respecto a la otra red neuronal, es que a la hora de implementar esta segunda se han usado los valores de las primeras y segundas derivadas de la transformada de Fourier, en lugar de los coeficientes de la aplicación de Dirichlet-to-Neumann.

En cuanto a las características que va a tener esta red neuronal, son de nuevo las mismas que las que usamos la anterior vez, repitiéndose el uso de la clase “MLPClassifier()”.

Es de esta manera como obtenemos estos resultados para un conjunto de datos con un salto de 1 y un salto mayor de 2 y que se muestran en la siguiente gráfica:

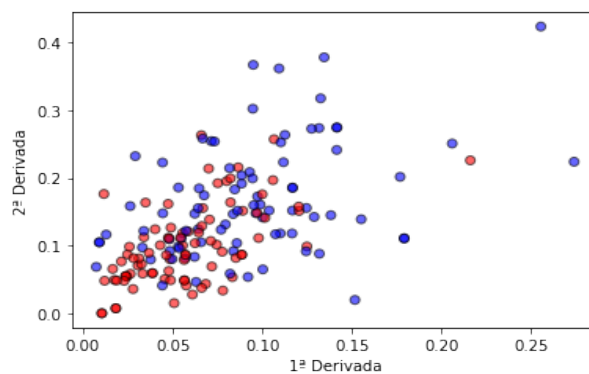


Figura 5.6: Clasificación en función de  $1^{\text{a}}$  y  $2^{\text{a}}$  derivada con un 71 % de acierto (aprox.)

Como podemos apreciar, la tasa de acierto es algo menor que en el caso de la red neuronal de Dirichlet-to-Neumann, por lo que podemos deducir que la transformada de Fourier tiene menor precisión a la hora de clasificar.

### 5.3. Conclusiones y trabajo futuro.

Para poder extraer una conclusión más objetiva hemos realizado ambos experimentos que se describieron en las dos secciones anteriores pero con distintos conjuntos de datos. Esto es, se han calculado las tasas de acierto usando la red neuronal de Dirichlet-to-Neumann y la de la transformada de Fourier, con los siguientes conjuntos de datos:

- Conductividades basadas en potenciales con saltos de 0,4 y 5.
- Conductividades basadas en potenciales con saltos de 0,5 y 4.
- Conductividades basadas en potenciales con saltos de 1 y 100.

Lo que se pretendía con estas pruebas es poder obtener unos resultados para comparar ambas redes neuronales. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Conductividades	Tasa de acierto
Saltos de 1 y 2	84.71 %
Saltos de 0.4 y 5	85.88 %
Saltos de 0.5 y 4	88.82 %
Saltos de 1 y 100	94.71 %

Tabla 5.1: Tabla resultados de la red neuronal de la aplicación Dirichlet-to-Neumann.

Y por el otro lado tenemos:

Conductividades	Tasa de acierto
Saltos de 1 y 2	64.71 %
Saltos de 0.4 y 5	68.24 %
Saltos de 0.5 y 4	75.29 %
Saltos de 1 y 100	65.88 %

Tabla 5.2: Tabla resultados de la red neuronal de la transformada de Fourier.

Como podemos apreciar en las dos tablas previamente adjuntadas con los resultados de nuestros experimentos, las tasas de acierto obtenidas en la red neuronal de la aplicación de Dirichlet-to-Neumann que en la de la transformada de Fourier. Además, se puede ver cómo los aciertos en Dirichlet van aumentando a medida que la diferencia entre los saltos es mayor, de una manera sustancial alcanzando casi el 100 % de los aciertos. En conclusión, los coeficientes de la aplicación de Dirichlet-to-Neumann contienen mucha más información que las primera y segunda derivadas de la transformada de Fourier.

# Bibliografía

---

- [1] P CALDERÓN ALBERTO.: *On an inverse boundary value problem. Comp. Appl. Math, 25(2-3)* (2006).
- [2] MANUEL GONZÁLEZ BURGOS: *Espacios de Sobolev. Primeras propiedades, Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla.*
- [3] JENNIFER L. MUELLER, SAMULI SILTANEN: *Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications*(2012).
- [4] ADRIAN I. NACHMAN: *Global Uniqueness for a Two-Dimensional Inverse Boundary Value Problem, Annals of Mathematics*(Jan., 1996).

