El diablo de los números

Sección a cargo de

Fernando Chamizo Lorente

¿Y quién es... Antonio Córdoba? *En vez de citar sus extensos méritos, aquí viene al caso que dirigió mi tesis doctoral y, en aquellos tiempos en que me presentaba el problema del círculo y el principio de la fase estacionaria, me habló de una relación entre la sumación de Möbius y la radiación del cuerpo negro. Con cierto sonrojo debo añadir que solo he llegado a entenderla plenamente muchos años después, tras este magnífico artículo. Aprovecho para agradecer a Antonio su dedicación entonces y ahora y desearle lo mejor en la nueva etapa que inicia.*

Variaciones en torno a la función de Möbius

por

Antonio Córdoba

1. Andante

Recordemos que la función de Möbius está definida por sus valores: $\mu(1) = 1$; $\mu(n) = (-1)^k$ si el entero n es un producto de k primos distintos; $\mu(n) = 0$ en los restantes casos. Es una función multiplicativa ($\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ si m y n son primos entre sí) y, entre otras muchas propiedades interesantes, verifica que la suma $\sum_{d|n} \mu(d)$ es igual a 1 para $n = 1$ y es 0 cuando $n > 1$.

El orden de magnitud de las llamadas sumas de Mertens, $M(n) = \sum_{m\leq n} \mu(m)$, resulta ser crucial para conocer la distribución de los números primos, siendo la hipótesis de Riemann equivalente a la estimación $M(n) = O\big(n^{1/2+\epsilon}\big)$ para todo $\epsilon > 0$. Sin embargo, por ahora solo sabemos [7, Th. 12.7]

$$M(n) = O\big(n \exp(-C(\log n)^{3/5}(\log\log n)^{-1/5})\big), \qquad C > 0,$$

y eso implica la ausencia de ceros de la función ζ de Riemann en la línea vertical $\Re(z) = 1$. Lo que es fundamental para demostrar el *Teorema de los Números Primos*:

$$\pi(n) = \#\{\text{primos} \leq n\} \sim \frac{n}{\log n}, \qquad n \to \infty.$$

La función ζ está definida por la serie absolutamente convergente $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$, cuando $\Re(z) > 1$. Pero admite una prolongación a todo el plano complejo como función meromorfa cuyo único polo está en $z = 1$.

Siguiendo a Euler podemos obtener ζ en forma de producto infinito $\zeta(z) = \prod_p \left(1 - p^{-z}\right)^{-1}$ donde p toma todos los valores primos: $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ Se trata simplemente de una manera de expresar el *Teorema Fundamental de la Aritmética*: «todo entero positivo distinto de la unidad se descompone de manera única (salvo por el orden de los factores) en producto de números primos».

La fórmula de Euler nos permite también escribir

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^z}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z},$$

resultado que sigue siendo válido cuando $\Re(z) = 1$.

La estimación

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{\left|\zeta(1+it)\right|^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 1.506\ldots$$

ha sido obtenida con la ayuda de un ordenador. Pero debe ser tomada con precaución, con un grano de sal según la conocida expresión inglesa, por la naturaleza intrincada de las constantes efectivas en las estimaciones [2]. En cualquier caso debo a la destreza de Javier Gómez el cálculo de I, que más adelante trataré de ilustrar y que ha sido obtenido a través de los valores de $\mu(n)$, $n \leq 10^7$.

2. Allegro moderato

Bajo condiciones adecuadas acerca de las funciones f podemos considerar los operadores S y T dados por las series

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f\Big(\frac{x}{n}\Big) \qquad \text{y} \qquad Tf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} f\Big(\frac{x}{n}\Big),$$

y observar que $T \circ S = S \circ T = \mathrm{Id}$:

$$\begin{aligned} T\big(Sf\big)(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} Sf\Big(\frac{x}{n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} f\Big(\frac{x}{mn}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} f\Big(\frac{x}{k}\Big) \Big(\sum_{mn=k} \mu(n)\Big) = f(x), \end{aligned}$$

por cuanto

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$$

Análogamente podemos demostrar que $S \circ T$ es también la identidad. Las condiciones adecuadas son las que hacen que las series resulten convergentes y que el intercambio del orden de sumación sea legítimo.

En el grupo multiplicativo de los reales positivos $\mathbb{R}^+$, la medida invariante de Haar es $x^{-1}\,dx$, y la transformada de Mellin

$$Mf(s) = \int_0^\infty x^{-is} f(x)\,\frac{dx}{x}$$

verifica el teorema de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|Mf(s)\big|^2\,ds = 2\pi \int_0^\infty \big|f(x)\big|^2\,\frac{dx}{x}, \tag{1}$$

que es equivalente al que satisface la transformada de Fourier en el grupo aditivo de todos los reales:

$$\|\widehat{g}\|_2 = \|g\|_2, \qquad \widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi} g(x)\,dx.$$

En el análisis armónico del grupo $\mathbb{R}^+$ con la medida $x^{-1}\,dx$ desempeñan un papel importante las funciones para las que la integral de la derecha en (1) es finita y constituyen el espacio $L^2\big(\mathbb{R}^+, x^{-1}\,dx\big)$. Ejemplos son las funciones de Bessel $J_\nu(x)$, $\nu > 0$, cuyo estudio es un capítulo relevante del análisis matemático. Entre sus propiedades podemos señalar que J_ν es solución de la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

y tiene el desarrollo siguiente:

$$J_\nu(x) = \Big(\frac{x}{2}\Big)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2m},$$

que es válido para todo $x \geq 0$.

Sabemos también que $J_\nu(x) = O\big(|x|^{-1/2}\big)$ cuando $|x| \to \infty$, siendo esta propiedad consecuencia de la expresión integral

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu t - x \operatorname{sen} t)\,dt - \frac{\operatorname{sen}(\pi\nu)}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu t - x \operatorname{senh} t}\,dt$$

a través del método de van der Corput (o también de fase estacionaria), que es útil para estimar integrales oscilatorias.

Las referencias [13] y [14] presentan demostraciones de numerosas propiedades interesantes satisfechas por las funciones de Bessel. Entre las que son relevantes para este ensayo cabe destacar:

- $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} J_\nu(x)$,
- $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$,
- $\displaystyle\int_0^\infty J_\nu\Big(\frac{x}{a}\Big) J_\nu\Big(\frac{x}{b}\Big)\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2\nu}\,\text{mín}\Big(\big(\frac{a}{b}\big)^\nu, \big(\frac{b}{a}\big)^\nu\Big)$,
- $\displaystyle\int_0^\infty J_\nu(x) J_\mu(x)\,\frac{dx}{x} = 0, \quad \text{si } \nu \neq \mu$,
- $\displaystyle MJ_\nu(s) = \int_0^\infty x^{-is} J_\nu(x)\,\frac{dx}{x} = \frac{2^{-is}\Gamma\big((\nu - is)/2\big)}{(\nu + is)\Gamma\big((\nu + is)/2\big)}$.

Estamos ahora en condiciones de tratar la integral I.

Consideremos la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n} J_1\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Un sencillo cálculo permite obtener su transformada de Mellin:

$$Mf(s) = \int_0^\infty x^{-is} f(x)\,\frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n} \int_0^\infty x^{-is} J_1\Big(\frac{x}{n}\Big)\,\frac{dx}{x}.$$

El cambio de variable $x = ny$ en la integral nos da

$$Mf(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^{1+is}}\, MJ_1(s) = \frac{1}{\zeta(1+is)}\,\frac{2^{-is}\Gamma\big((1-is)/2\big)}{(1+is)\Gamma\big((1+is)/2\big)},$$

y la identidad $\Gamma\big((1-is)/2\big) = \overline{\Gamma\big((1+is)/2\big)}$ satisfecha por la función Gamma implica

$$\big|Mf(s)\big| = \frac{1}{\big|\zeta(1+is)\big|} \cdot \frac{1}{(1+s^2)^{1/2}}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{\big|\zeta(1+it)\big|^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\big|\zeta(1+it)\big|^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \pi \int_0^\infty \Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n} J_1\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big)^2\,\frac{dx}{x} \\
&= \pi \sum_{m,n=1}^\infty \frac{\mu(n)\mu(m)}{nm} \int_0^\infty J_1\Big(\frac{x}{n}\Big) J_1\Big(\frac{x}{m}\Big)\,\frac{dx}{x} \\
&= \frac{\pi}{2} \sum_{m,n=1}^\infty \frac{\mu(n)\mu(m)}{nm}\,\text{mín}\Big(\frac{n}{m}, \frac{m}{n}\Big),
\end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$\frac{\pi}{2}\Big(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}\sum_{m=1}^{n}\mu(m)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{n^2}\Big).$$

Reemplazando las sumas infinitas por sumas hasta N (las denoto S_1^N y S_2^N) obtenemos los siguientes valores:

N	S_1^N	S_2^N
10^3	1.2390804	1.5192090
10^4	1.2393851	1.5197570
10^5	1.2394125	1.5198117
10^6	1.2394153	1.5198171
10^7	1.2394156	1.5198177

Por lo que tomando los datos correspondientes al valor $N = 10^7$ obtenemos la estimación

$$I = 1.5064\dots$$

La acotación de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\big|\zeta(1+it)\big|^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = 2I = 3.012\dots$$

implica obviamente la ausencia de ceros de la función ζ en la línea vertical $\Re(z) = 1$. Esto, a su vez, implica el Teorema de los Números Primos. Pero sería tramposo aducir que el cálculo anterior es una nueva demostración de este teorema, por cuanto la prueba de que la función $\sum\frac{\mu(n)}{n}J_1(x/n)$ pertenece al espacio $L^2\big(\mathbb{R}^+, x^{-1}dx\big)$ se basa en las estimaciones conocidas para las sumas de Mertens: $M(n) = O\big(n/(\log n)^\alpha\big)$, para cualquier $\alpha > 0$.

La inspiración para hacer estas cuentas vino de otros problemas en los que yo estaba trabajando. Ahora bien, una vez que conocemos la finitud de la integral I podemos reconstruir el procedimiento para llevarlo al terreno más conocido de la transformada de Fourier en la recta real:

$$\begin{aligned}2I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\big|\zeta(1+it)\big|^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} &= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{1+it}}\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^{1-it}}\Big)\frac{dt}{1+t^2}\\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\mu(m)}{nm}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it(\log n-\log m)}\,\frac{dt}{1+t^2}\\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\mu(m)}{nm}\,\text{mín}\Big(\frac{n}{m},\frac{m}{n}\Big).\end{aligned}$$

Surge la pregunta: suponiendo que ζ carezca de ceros en la línea $\Re(z) = \sigma$, $1/2 < \sigma < 1$, ¿es cierto que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\big|\zeta(\sigma+it)\big|^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} < \infty\,?$$

3. Assai

La identidad $T \circ S = S \circ T = \mathrm{Id}$ equivale a $\widetilde{T} \circ \widetilde{S} = \widetilde{S} \circ \widetilde{T} = \mathrm{Id}$, donde

$$\widetilde{S}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f\Big(\frac{x}{n}\Big), \qquad \widetilde{T}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) f\Big(\frac{x}{n}\Big),$$

así como a $\widetilde{T}' \circ \widetilde{S}' = \widetilde{S}' \circ \widetilde{T}' = \mathrm{Id}$, siendo ahora

$$\widetilde{S}'g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(nx), \qquad \widetilde{T}'g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) g(nx),$$

y todas ellas son versiones de la llamada *fórmula de inversión de Möbius*, que desempeña un papel muy relevante en diversas teorías aritméticas.

Un ejemplo notable viene dado por la función $\mathcal{T}(x) = \sum_{n \le x} \log n$. Resulta que

$$\mathcal{T}(x) = \psi(x) + \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) + \psi\Big(\frac{x}{3}\Big) + \cdots,$$

donde ψ es la función de Chebychev

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n),$$

siendo $\Lambda(n) = \log p$ si n es potencia de un primo p, mientras que $\Lambda(n) = 0$ en los restantes casos. Es decir,

$$\psi(x) = \sum_{p^m \le x} \log p = \sum_{m} \log p \Big\lfloor \frac{\log x}{\log p} \Big\rfloor$$

donde $\lfloor t \rfloor$ es la parte entera de t.

Una manera sencilla de verificar $\mathcal{T}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(x/n)$ es observar que tanto el miembro de la izquierda como el de la derecha tienen saltos iguales en los enteros y satisfacen $\mathcal{T}(1) = \psi(1) = 0$. En el caso del entero n, el miembro de la izquierda salta $\log n$ mientras que el de la derecha salta también $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$.

La fórmula de inversión de Möbius nos da

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \mathcal{T}\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Chebychev observó que la combinación

$$\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}\Big(\frac{x}{2}\Big) - \mathcal{T}\Big(\frac{x}{3}\Big) - \mathcal{T}\Big(\frac{x}{5}\Big) + \mathcal{T}\Big(\frac{x}{30}\Big)$$

tiene la notable propiedad de que al sustituir los valores $\mathcal{T}(x/n)$ en términos de la función ψ, la serie $\sum \lambda_n \psi(x/n)$ que resulta tiene signos alternados

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 0,\ \lambda_5 = 0, & \lambda_{10} = -1 \\ \lambda_6 = -1, & \lambda_{11} = 1, \\ \lambda_7 = 1,\ \lambda_8 = 0,\ \lambda_9 = 0, & \lambda_{12} = -1,\ \lambda_{13} = 0, \ldots \end{array}$$

Por lo tanto, es estrictamente mayor que $\psi(x) - \psi(x/6)$. La fórmula de Stirling nos permite escribir $\mathcal{T}(x) = x\log x - x + O(\log x)$ y obtener

$$\Big(\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{3}\log 3 + \frac{1}{5}\log 5 - \frac{1}{30}\log 30\Big)x + O(\log x) = 0.921\ldots x + O(\log x),$$

que implica la estimación

$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{6}\Big) < 0.921\ldots x + O(\log x).$$

Cambiando x por $x/6^k$, sumando todas estas iteraciones y observando que solo son necesarios $\log x/\log 6$ pasos para llegar a $\psi(x/6^n) = 0$, obtenemos

$$\psi(x) < \Big(1 + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{6^n}\Big)\cdot 0.921\ldots x + O(\log^2 x) < \frac{6}{5}\cdot 0.921\ldots x + O(\log^2 x).$$

Luego $\limsup \psi(x)/x < 1.105\ldots$ Por otro lado sabemos que $0.921\ldots x + K\log x < \psi(x)$. Es decir, obtenemos

$$0.921\ldots < \liminf \frac{\psi(x)}{x} \leq \limsup \frac{\psi(x)}{x} < 1.105\ldots,$$

una estupenda aproximación debida a Chebychev del Teorema de los Números Primos. Este análisis le permitió también a Chebychev dar una demostración del llamado *Postulado de Bertrand*: cada intervalo de enteros $[n, 2n]$ contiene un número primo.

4. Presto: La radiación del cuerpo negro

Todo cuerpo emite radiación electromagnética a menos que su temperatura sea de cero grados Kelvin. Se trata de una transformación de la energía interna del cuerpo en energía electromagnética, que recibe el nombre de radiación térmica.

Pero también es cierto que todo cuerpo absorbe radiación electromagnética. El caso «ideal» de un objeto que absorbe toda la radiación electromagnética incidente, tenga la frecuencia que tenga, recibe el nombre de *cuerpo negro*. Cuando un cuerpo negro se encuentra a una temperatura uniforme su emisión presenta una distribución característica de frecuencias que depende de la temperatura. Entender la radiación del cuerpo negro fue uno de los problemas que motivaron los inicios de la mecánica cuántica. La fórmula hallada por Max Planck es la siguiente:

$$W(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\int_0^\infty \frac{a(T)}{e^{h\nu/(kT)} - 1}\,dT,$$

donde

- $W(\nu) =$ radiación (por unidad de volumen) en la frecuencia ν,
- $a(T) =$ distribución de temperatura en la superficie del cuerpo negro,

- $h =$ constante de Planck,
- $k =$ constante de Boltzmann,
- $c =$ velocidad de la luz.

Conocer los detalles de la deducción de la fórmula de Planck a partir de los principios de la mecánica cuántica, y de la estadística de los fotones (distribución de Bose-Einstein), es un ejercicio que recomendamos, pero que en este breve ensayo no cabe abordar ([9] y [10]).

Surge el problema inverso: conocida la función observable $W(\nu)$, ¿podemos obtener la distribución de temperaturas $a(T)$?

El cambio de variables $x = h/(kT)$ nos permite escribir

$$W(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \int_0^\infty \frac{a\big(h/(kx)\big)}{e^{\nu x} - 1} \frac{h\,dx}{kx^2} = \nu^3 \int_0^\infty \frac{f(x)}{e^{\nu x} - 1}\,dx$$

con f definida de la forma obvia. Tenemos que

$$\frac{W(\nu)}{\nu^3} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\nu n x} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-\nu x} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} f\Big(\frac{x}{n}\Big)\,dx.$$

Sea g la función del sumatorio; la fórmula de inversión de Möbius nos da

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n} g\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Luego para conocer f, es decir $a(T)$, basta con conocer g. Pero

$$\nu^{-3} W(\nu) = \mathcal{L}(g)(\nu) = \int_0^\infty e^{-\nu t} g(t)\,dt,$$

donde $\mathcal{L}$ designa a la transformada de Laplace, cuya inversa nos resuelve el problema:

$$g = \mathcal{L}^{-1}\big(\nu^{-3}W(\nu)\big), \qquad f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n} g\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

5. Fuga: Funciones de banda limitada

La fórmula de inversión de Möbius nos remite, pues, al siguiente par de operadores inversos:

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} f\Big(\frac{x}{n}\Big) \qquad \text{y} \qquad Tg(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n} g\Big(\frac{x}{n}\Big),$$

cuyas transformadas de Mellin son las siguientes:

$$M(Sf)(s) = \int_0^\infty x^{-is} Sf(x)\,\frac{dx}{x} = \zeta(1 + is) M(f)(s)$$

y
$$M(Tf)(s) = \int_0^\infty x^{-is} Tf(x)\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{\zeta(1+is)}\,M(g)(s).$$
La no acotación de las funciones $\zeta(1+is)$ y $1/\zeta(1+is)$, junto al teorema de Plancherel, impide que S y T puedan ser operadores acotados en el espacio «natural» $L^2(\mathbb{R}^+; x^{-1}dx)$. No obstante, en el caso de las funciones de Bessel J_ν, $\nu > 0$, se verifica que $TJ_\nu \in L^2(\mathbb{R}^+; x^{-1}\,dx)$:
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \big|TJ_\nu(x)\big|^2 \frac{dx}{x} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|\zeta(1+is)|^2}\cdot\frac{ds}{\nu^2+s^2}\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k,j}\frac{\mu(k)\mu(j)}{kj}\int_{-\infty}^\infty e^{-is(\log k-\log j)}\,\frac{ds}{\nu^2+s^2}\\ &= \frac{1}{2\pi\nu}\sum_{k,j}\frac{\mu(k)\mu(j)}{kj}\,\text{mín}\Big(\Big(\frac{k}{j}\Big)^\nu, \Big(\frac{j}{k}\Big)^\nu\Big) < \infty.\end{aligned}$$

Sin embargo, $S(J_\nu)$ no está en $L^2(\mathbb{R}^+; x^{-1}\,dx)$, como un cálculo muestra fácilmente. Ese mismo cálculo permite demostrar también que la condición
$$\sum_{\nu=0}^\infty \frac{|a_{\nu_0+\nu}|}{\sqrt{\nu_0+\nu}} < \infty, \quad \nu_0 > 0,$$
es suficiente para que la *serie de Neumann*
$$f(x) = \sum_{\nu=0}^\infty a_{\nu_0+\nu} J_{\nu_0+\nu}(x) \quad \text{verifique} \quad Tf \in L^2(\mathbb{R}^+; x^{-1}\,dx).$$
Resulta fácil comprobar que la condición
$$\sum_{\nu=0}^\infty \frac{|a_{\nu_0+\nu}|^2}{\nu_0+\nu} < \infty, \quad \nu_0 > 0,$$
es necesaria y suficiente para que las sumas parciales
$$S_N(x) = \sum_{\nu=0}^N a_{\nu_0+\nu} J_{\nu_0+\nu}(x), \quad \nu_0 > 0,$$
converjan en la métrica de $L^2(\mathbb{R}^+; x^{-1}\,dx)$.

¿Qué ocurre en $L^p(\mathbb{R}^+; x^{-1}dx)$, $p \neq 2$? La respuesta, nada elemental por cierto, es que dicha convergencia es válida si y solo si $4/3 < p < 4$. Se trata no obstante, de un problema relacionado con el llamado *multiplicador del disco* para la transformada de Fourier y los operadores de sumación esférica o de Bochner-Riesz ([1], [4], [3]).

Las series de Neumann son también un instrumento valioso en teoría de la comunicación: una señal $f(t)$ es allí una función del tiempo, mientras que su transformada de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ nos da la amplitud de la señal en la frecuencia ξ.

Las funciones cuya transformada de Fourier se anula fuera de un intervalo de frecuencias $[-\Omega,\Omega]$ se dice que son *de banda limitada*. En el caso de las series de Neumann donde $\nu_0 = 1/2$, es decir, sus índices son $\nu = n + 1/2$ con n entero no negativo, se verifica que una condición necesaria y suficiente para que una señal $f(t)$ pueda ser representada por una tal serie es que la transformada de Fourier de la función $t^{-1/2}f(t)$ se anule fuera del intervalo $[-1,1]$. Resultado que podemos trasplantar al intervalo general $[-\Omega,\Omega]$ con un cambio de escala adecuado.

Una versión del *principio de incertidumbre* afirma que no puede existir una señal no nula que sea, a la vez, limitada en tiempo y en frecuencia. En un celebrado trabajo de Claude Shannon, uno de los fundadores de la teoría matemática de la comunicación, se introdujo el conjunto $B(T,\Omega;\epsilon)$ de las señales tales que, con precisión $\epsilon > 0$, tienen su energía concentrada en el intervalo temporal $[0,T]$ y sus frecuencias en $[-\Omega,\Omega]$. Es decir,

$$\int_0^T \big|f(t)\big|^2\,dt \ge (1-\epsilon)\|f\|_2^2 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\Omega}^{\Omega} \big|\widehat{f}(\xi)\big|^2\,d\xi \ge (1-\epsilon)\|\widehat{f}\|_2^2.$$

Siguiendo a Shannon, Landau y Pollack demostraron que el espacio $B(T,\Omega;\epsilon)$ tiene asintóticamente (cuando Ω y T tienden a infinito) la dimensión $2\Omega T$, para todo $\epsilon > 0$ (ver [11], [8], [12]). Resulta que las funciones $J_{n+1/2}$, y las series asociadas de Neumann, desempeñan un papel decisivo en este análisis, por estar muy próximas a las funciones que constituyen la base que optimiza el cálculo de la dimensión.

La estimación $J_\nu(x) = O\big(|x|^{-1/2}\big)$, $|x|\to\infty$, implica que $\sum_{n\le x}\frac{1}{n}J_\nu(x/n)$ es una función acotada de la variable x. Pero eso no es así en los dos ejemplos siguientes:

$$P(x) = \sum_{n\le x}\frac{1}{n}\cos\Big(2\pi\frac{x}{n}\Big) \qquad \text{y} \qquad Q(x) = \sum_{n\le x}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\Big(2\pi\frac{x}{n}\Big).$$

No obstante, si con la ayuda de un ordenador dibujamos las gráficas de P y Q, sacaremos la impresión de que se trata de funciones acotadas, al menos dentro de los rangos de nuestros computadores actuales. Pero se trata de una impresión falsa ya que Hardy y Littlewood [6] demostraron que

$$\limsup_{x\to\infty}\Big|\frac{P(x)}{\log\log x}\Big| > 0 \qquad \text{y} \qquad \limsup_{x\to\infty}\Big|\frac{Q(x)}{(\log\log x)^{1/2}}\Big| > 0.$$

En su demostración, Hardy y Littlewood comienzan observando que

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}e^{2\pi i x/n} = \sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{1}{n}e^{2\pi i x/n} + O(1).$$

Con mayor generalidad: dados $\sqrt{x}\le a < b \le x$, tenemos que

$$\sum_{a\le n\le b}\frac{1}{n}e^{2\pi i x/n} = O(1), \quad \text{uniformemente en } a \text{ y } b.$$

La demostración se obtiene por comparación con la integral $\int_a^b e^{2\pi i x/t}\,\frac{dt}{t} = O(1)$. Es decir,

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\le n\le b}\Big(\frac{1}{n}e^{2\pi i x/n} - \int_n^{n+1} e^{2\pi i x/t}\,\frac{dt}{t}\Big)\\
&\quad = \sum_{a\le n\le b}\int_n^{n+1}\Big(\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{t}\Big)e^{2\pi i x/n} + \frac{1}{t}\Big(e^{2\pi i x/n} - e^{2\pi i x/t}\Big)\Big)\,dt\\
&\quad = O\Big(\sum_{a\le n\le b}\frac{1}{n^2}+\frac{x}{n^3}\Big) = O\Big(\frac{x}{a^2}\Big) = O(1).
\end{aligned}$$

Fijado $y \gg 1$ consideremos los números $x_j = jy$, $j = 1, 2, \dots, y$, que satisfacen las desigualdades $y \le x_j \le y^2$. Por la observación anterior tenemos que

$$P(x_j) = \sum_{1\le n\le y}\frac{1}{n}\cos\Big(2\pi\frac{jy}{n}\Big) + O(1), \quad \text{uniformemente en } j \le y.$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{y}\Big(1-\frac{j}{y}\Big)P(x_j) = \sum_{1\le n\le y}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{y}\Big(1-\frac{j}{y}\Big)\cos\Big(2\pi\frac{jy}{n}\Big) + O(y).$$

El núcleo de Fejér nos permite escribir

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{y}\Big(1-\frac{j}{y}\Big)P(x_j) &= \frac{1}{2}\sum_{1\le n\le y}\frac{1}{ny}\Big(\frac{\operatorname{sen}(\pi y^2/n)}{\operatorname{sen}(\pi y/n)}\Big)^2 + O(y)\\
&\ge \frac{1}{2}\sum_{d\mid y}\frac{1}{dy}\cdot y^2 + O(y) = \frac{1}{2}y\sum_{d\mid y}\frac{1}{d} + O(y).
\end{aligned}$$

En particular tenemos que

$$\max_{1\le j<y} P(jy) \ge \frac{1}{2}\sum_{d\mid y}\frac{1}{d} + O(1).$$

Escogiendo $y = x!$ resulta que la suma es mayor que $\sum_{k=1}^{x} k^{-1} \ge \log x \gtrsim \log\log y$.

El caso de $Q(x)$ es algo más complicado pero su demostración puede obtenerse con cálculos similares [6].

En la otra dirección (acotación del crecimiento de $P(x)$ y $Q(x)$) es obvio que $|P(x)| = O(\log x) = |Q(x)|$. Con ayuda de las estimaciones conocidas de sumas trigonométricas (métodos de van der Corput, Weyl y Vinogradov) se han podido mejorar un poco las cotas elementales y sabemos que P y Q son $O\big((\log x)^{3/4}(\log\log x)^{1/2+\epsilon}\big)$, para todo $\epsilon > 0$ [5]. Pero este tipo de estimaciones raramente producen resultados óptimos. Habida cuenta de la relevancia que estas sumas tienen en las aplicaciones del llamado *método de sumación de Lambert* en la teoría de los números y también, parafraseando lo que el gran montañero Mallory decía de la ascensión al Everest, ¡ya que está ahí!, podemos preguntarnos:

- ¿Cuál es el verdadero orden de magnitud, cuando $x \to \infty$, de $P(x)$ y $Q(x)$?
- Sean

$$\widetilde{P}(x) = \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} \cos\left(2\pi \frac{x}{n}\right) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{Q}(x) = \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{x}{n}\right).$$

¿Son $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$ funciones acotadas?

Referencias

[1] J. A. Barceló y A. Córdoba, Band-limited functions: L^p-convergence, *Trans. Amer. Math. Soc.* **313** (1989), 655–669.

[2] O. Bordellès, Some explicit estimates for the Möbius function, *J. Integer Seq.* **18** (2015), Article 15.11.1, 13 pp.

[3] Ó. Ciaurri y J. L. Varona, The surprising almost everywhere convergence of Fourier-Neumann series, *J. Comput. Appl. Math.* **233** (2009), 663–666.

[4] A. Córdoba, The disc multiplier, *Duke Math. J.* **58** (1989), 21–29.

[5] T. M. Flett, On the function $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\sin(t/n)$, *J. London Math. Soc.* **25** (1950), 5–19.

[6] G. H. Hardy y J. E. Littlewood, Notes on the theory of series (XX): On Lambert series, *Proc. London Math. Soc. (2)* **41** (1936), 257–270.

[7] A. Ivić, *The Riemann zeta-function. The theory of the Riemann zeta-function with applications*, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[8] H. J. Landau y H. O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. III. The dimension of the space of essentially time- and band-limited signals, *Bell System Tech. J.* **41** (1962), 1295–1336.

[9] B. H. Lavenda, *Statistical physics. A probabilistic approach*, John Wiley & Sons, New York, 1991.

[10] M. Planck, Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum, *Annalen der Physik* **309** (1901), 553–563.

[11] C. E. Shannon, Communication in the presence of noise, *Proc. I.R.E.* **37** (1949), 10–21.

[12] D. Slepian y H. O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. I, *Bell System Tech. J.* **40** (1961), 43–63.

[13] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Reimpreso de la segunda edición (1944).

[14] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Reimpreso de la cuarta edición (1927).

Departamento de Matemáticas de la UAM e ICMAT, 28049 Madrid
Correo electrónico: `antonio.cordoba@uam.es`
Página web: `http://matematicas.uam.es/~antonio.cordoba/`