La razón geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo

por

Antonio Córdoba

El lema de Vitali.

Resulta notable constatar la diversidad de aplicaciones analíticas que tienen ciertos teoremas de la geometría elemental. Unos ejemplos dignos de ser resaltados son los llamados lemas de cubrimiento, que desempeñan un papel importante en diversas teorías del Análisis Matemático. El más conocido es el de Vitali.

Lema 1 (Vitali) *Sea $\mathcal{F} = \{B_i\}_{i\in I}$ una familia finita de bolas del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Podemos extraer una subfamilia $B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}$, disjuntas dos a dos, y tales que*

$$\mu\left\{\bigcup_{i\in I} B_i\right\} \leq 3^n \sum_{k=1}^{s} \mu(B_{i_k}),$$

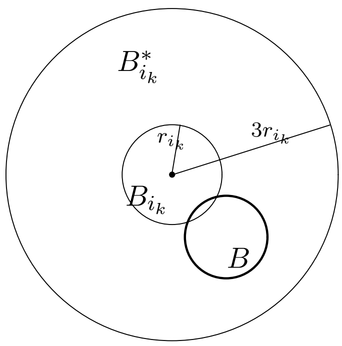
donde μ designa a la medida de Lebesgue del espacio $\mathbb{R}^n$.

La sencilla demostración es de naturaleza inductiva: para empezar, sea B_{i_1} la bola de volumen máximo en $\mathcal{F}$. Dando por supuesto que hemos escogido $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$, tomaremos $B_{i_{k+1}}$ de volumen máximo entre todos los elementos de $\mathcal{F}$ que sean disjuntos con las k bolas anteriormente elegidas. El proceso se para cuando no quedan bolas disjuntas donde escoger.

Dada una bola cualquiera $B \in \mathcal{F}$, ora se trata de una de las elegidas, ya tiene una intersección no vacía con una de ellas cuyo volumen es mayor o igual que el suyo propio:

$$B \cap B_{i_k} \neq \emptyset, \qquad \mu(B_{i_k}) \geq \mu(B).$$

En estas circunstancias tenemos que $B \subset B^*_{i_k}$, donde $B^*_{i_k}$ es la bola concéntrica con B_{i_k} pero de radio tres veces mayor, como muestra la figura.



Es decir,

$$\bigcup_{i\in I} B_i \subset \bigcup B^*_{i_k}\,.$$

Por tanto,

$$\mu(\bigcup B_i) \leq \sum \mu(B^*_{i_k}) = 3^n \sum \mu(B_{i_k}) = 3^n \mu(\bigcup B_{i_k}). \qquad \square$$

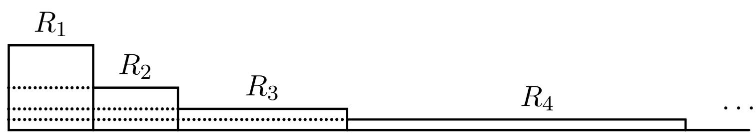
El lema de Vitali sigue siendo válido si sustituimos las bolas por cubos, pero

> *¿qué ocurre si en vez de bolas o cubos consideramos otros tipos de conjuntos?*

El siguiente ejemplo nos indica que el lema de Vitali falla para rectángulos de $\mathbb{R}^2$ (en general, paralelepípedos de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) de lados paralelos a los ejes coordenados: sean los rectángulos

$$\begin{aligned}
R_1 &= [0,1] \times [0,1]\,,\\
R_2 &= [0,2] \times \left[0,\frac{1}{2}\right]\,,\\
R_3 &= [0,4] \times \left[0,\frac{1}{4}\right]\,,\\
&\vdots\\
R_N &= \left[0,2^{N-1}\right] \times \left[0,2^{-(N-1)}\right].
\end{aligned}$$

de la figura:



Observemos que $R_j \cap R_k \neq \emptyset$, $\mu(R_k) = 1$ y que

$$\mu(R_1 \cup \ldots \cup R_N) = \frac{N+1}{2}\,.$$

El Teorema Fundamental del Cálculo.

En él se demuestra que la derivación, que surgió para dar un sentido preciso y poder calcular las tangentes a una curva o la velocidad instantánea de un móvil, y la integración, que proviene del cálculo de áreas y volúmenes, son operaciones inversas.

Sea f una función continua en la recta real. Entonces la función continua $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ es derivable y satisface la identidad

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

En general, sea $\{A_k\}$ una sucesión de conjuntos medibles que contienen al punto x de $\mathbb{R}^n$, y tales que sus diámetros tienden a cero (lo que designaremos con la notación $A_k \Rightarrow x$), entonces, dada cualquier función continua f, se verifica que

$$\lim_{A_k \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} f(y)d\mu(y) = f(x).$$

Cada término

$$\frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} f(y)d\mu(y)$$

es un promedio de la función. El Teorema Fundamental dice, pues, que los promedios de las funciones continuas convergen, siempre y cuando los diámetros de los conjuntos sobre los que promediamos tiendan a cero.

La teoría de la medida de Lebesgue es uno de los paradigmas básicos del Análisis Matemático del siglo XX. También lo es el hecho de que no nos basta con analizar las funciones continuas. A pesar de que nuestros objetivos sean procesos continuos, o incluso diferenciables, en muchas ocasiones, los necesarios pasos intermedios del análisis conllevan el trato con funciones más "rugosas" y discontinuas. Pues bien, los promedios $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(y)d\mu(y)$ tienen sentido para todas las funciones que son integrables según Lebesgue. Aunque una tal función f sólo esté definida salvo conjuntos de medida cero, podemos preguntarnos, sin embargo, si sus promedios convergen a la función en casi todo punto, es decir, excepto un conjunto de medida también nula.

Esta pregunta resulta ser más sutil y difícil de lo que aparenta. La respuesta depende mucho de la geometría de los conjuntos sobre los que promediamos. En general es negativa, pero si nos limitamos a cubos o bolas de $\mathbb{R}^n$ tenemos una contestación positiva.

Teorema 1 (de diferenciación de Lebesgue) *Si f es una función localmente integrable, entonces*

$$\lim_{B_k \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_k} f(y)d\mu(y) = f(x)$$

para casi todo punto x, donde los conjuntos B_k son cubos o bolas de $\mathbb{R}^n$ y μ es la medida de Lebesgue n-dimensional.

En un artículo seminal [2], Hardy y Littlewood consideraron el operador

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y)$$

donde el "sup" está tomado sobre todas las bolas (o cubos) de $\mathbb{R}^n$ que contienen al punto x. Demostraron la desigualdad siguiente:

Teorema 2 (maximal) *Para toda función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y todo número $\alpha > 0$,*

$$\mu\{x : \; Mf(x) > \alpha > 0\} \leq \frac{C_n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| d\mu(y) \,,$$

donde $C_n < \infty$ es una constante independiente de f y de α.

La desigualdad del teorema maximal es consecuencia del lema de Vitali. Si

$$K \subset E_\alpha = \{x : \; Mf(x) > \alpha\}$$

es un compacto, entonces debe estar contenido en un conjunto finito de bolas B_i tales que

$$\frac{1}{\mu(B_i)} \int_{B_i} |f(y)| d\mu(y) > \alpha \,.$$

Según Vitali existe una subfamilia $B_{1_1}, \ldots, B_{i_s}$, disjuntas dos a dos, y tales que

$$\begin{aligned} \mu(K) \;\; &\leq \;\; \mu(\bigcup B_i) \leq 3^n \sum \mu(B_{i_k}) \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum \int_{B_{i_k}} |f(y)| d\mu(y) \\ &\leq \;\; \frac{3^n}{\alpha} \int_{\cup B_{i_k}} |f(y)| d\mu(y) \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1 \,. \end{aligned}$$

Finalmente observemos que

$$\mu(E_\alpha) = \sup_{K \subset E_\alpha} \mu(K)$$

para concluir la demostración[1]. $\square$

No es difícil ver cómo el teorema maximal implica el de diferenciación de Lebesgue, del que resulta ser su versión cuantitativa. Conviene resaltar, sin embargo, el esquema del proceso anterior: una proposición "cualitativa" importante, como es el Teorema Fundamental del Cálculo dentro de la teoría de la medida, viene implicado por una versión "cuantitativa" o desigualdad de tipo débil (1,1) para el operador maximal, que, a su vez, es consecuencia de un sencillo resultado geométrico: el lema de cubrimiento de Vitali. Esta reducción a la geometría es tan satisfactoria que ha originado numerosos intentos de reproducirla en otras situaciones. Sin embargo, no sólo no resulta fácil, sino que es incluso imposible de llevar a cabo en muchos ejemplos interesantes.

[1]La demostración original de Hardy-Littlewood [2] es distinta y se basa en un ingenioso argumento acerca de la reordenación decreciente de una sucesión de números.

El caso de los paralelepípedos de $\mathbb{R}^n$.

Tanto el teorema maximal como el de diferenciación están conectados con el comportamiento de diversas aproximaciones de la identidad. Por ejemplo, con la convergencia de las integrales de Poisson y de Fejer, o de las soluciones de la ecuación del calor al dato inicial. Si los conjuntos de nivel de los correspondientes núcleos de convolución son convexos de excentricidad uniformemente acotada, el operador maximal sobre bolas nos sirve para dominar la convergencia. Pero hay casos importantes en los que esa premisa geométrica no se verifica.

Designemos con B_n el conjunto de los rectángulos (paralelepípedos) de $\mathbb{R}^n$, de lados paralelos a los ejes coordenados. En [4] Saks demostró que para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, excepto las de un conjunto de primera categoría de Baire, se tiene que

$$\limsup_{\substack{R \in B_n \\ R \Rightarrow x}} \frac{1}{\mu(R)} \int_R |f(y)| d\mu(y) = +\infty$$

para todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Resaltemos que este resultado va más lejos que la mera negación del teorema de diferenciación. No sólo porque "para todo x" sustituye a "en un conjunto de medida positiva", sino porque la afirmación se hace para un elemento genérico de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en el sentido de Baire.

Sean

$$M_n f(x) = \sup_{\substack{R \in B_n \\ x \in R}} \frac{1}{\mu(R)} \int_R |f(y)| d\mu(y)$$

y M_{x_j} la función maximal de Hardy-Littlewood en la dirección x_j. En [5], Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund hicieron uso de la acotación

$$(*) \qquad M_n f(x) \leq M_{x_n} \cdot M_{x_{n-1}} \ldots M_{x_1} f(x)$$

para obtener el siguiente resultado:

Teorema 3 (Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund) *Si la función*

$$|f(x)| \log^{n-1}(1 + |f(x)|)$$

es integrable, entonces

$$\lim_{\substack{R \in B_n \\ R \Rightarrow x}} \frac{1}{\mu(R)} \int_R f(y) d\mu(y) = f(x) \quad \textit{para casi todo } x.$$

¿Cuál es el lema geométrico subyacente en este teorema? La demostración dada en [5] saca partido de la estructura producto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, expresada por medio de la desigualdad $(*)$. Pero el resultado análogo para medidas más generales,[11], hace necesario entender la geometría de los rectángulos de $\mathbb{R}^n$. El artículo [6] contiene la respuesta.

Teorema 4 *Dada una familia finita $\{R_i\}_{i\in I}$ de paralelepípedos de $\mathbb{R}^n$, podemos seleccionar una subfamilia $R_{i_1}, \ldots, R_{i_s}$ de manera que:*

$$(i) \qquad \mu\Big(\bigcup_{i\in I} R_i\Big) \leq C\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{s} R_{i_k}\Big)$$

$$(ii) \qquad \int_{\cup R_{i_k}} \exp\left[\sum_{k=1}^{s} \chi_{R_{i_k}}(x)\right]^{1/(n-1)} d\mu(x) \leq C\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{s} R_{i_k}\Big)\,,$$

donde $C < \infty$ es una constante que depende sólo de la dimensión, mientras que χ_R designa a la función indicadora del conjunto R, es decir,

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } x \in R, \\ 0\,, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Observemos que la condición (ii) es más débil que la condición de ser disjuntos dos a dos, que postula el lema de Vitali. No obstante implica un decaimiento exponencial del solapamiento:

$$\mu\left\{x:\ \sum_{k=1}^{s} \chi_{R_{i_k}}(x) \geq \alpha > 0\right\} \leq C\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{s} R_{i_k}\Big)\exp\left(-\alpha^{1/(n-1)}\right).$$

Además, en un sentido preciso, la desigualdad anterior es la auténtica extensión del lema de Vitali al caso de los rectángulos de B_n. La demostración dada en [6] es de carácter geométrico e inductiva respecto a la dimensión del espacio. También desempeñan un papel importante las acotaciones del operador de Hardy-Littlewood en los espacios de Orlicz $L(\log^+ L)^k$, así como las técnicas de linealización y dualidad desarrolladas en [7], que expresan, de forma funcionalmente precisa, cómo el lema de cubrimiento y la desigualdad de tipo débil son estimaciones de operadores adjuntos, en los espacios duales correspondientes.

Tras el resultado de Saks [4] podemos preguntarnos si la divergencia sigue manteniéndose en el caso de que rotemos los ejes coordenados. Se trata de una cuestión natural, habida cuenta de que, en muchos problemas, tenemos libertad para elegir los ejes. La respuesta más completa se debe a B. López Melero [8]. Dada una función convexa y estrictamente creciente

$$\psi:\ [0,\infty) \to [0,\infty), \qquad \psi(0) = 0\,,$$

la clase de Orlicz $\psi(L)$ está formada por las funciones que cumplen que

$$\int \psi(|f(x)|)d\mu(x) < \infty.$$

Si además existe $C < \infty$ de manera que $\psi(2u) \leq C\psi(u)$, para todo $u \geq 1$, entonces

$$\int \psi(|f(x)|)d\mu(x) < \infty$$

si y sólo si existe $r > 0$ tal que

$$\int \psi\left(\frac{|f(x)|}{r}\right) d\mu(x) \leq 1 \qquad (**)$$

y $\psi(L)$ es un espacio de Banach tomando como norma $\|f\|_\psi$ al ínfimo de los r que verifican $(**)$.

Teorema 5 (López Melero) *Sea ψ una función de Orlicz tal que*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{u\log^{n-1}(u)} = 0.$$

Entonces cada $f \in \psi(L)$ excepto las de un conjunto de primera categoría en $\psi(L)$ verifica que, para cada rotación γ de $\mathbb{R}^n$,

$$\limsup_{\substack{R\in B_n\\ R\Rightarrow x}} \frac{1}{\mu(R)}\int_R |f(\gamma(y))|d\mu(y) = +\infty.$$

para casi todo punto x.

El problema de Antoni Zygmund.

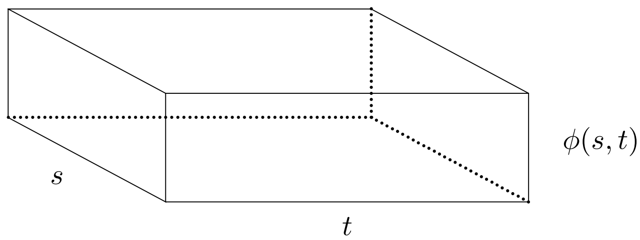
Antoni Zygmund (1900-92) es una figura señera del Análisis Armónico del siglo XX. Se formó en el seno de la espléndida escuela matemática polaca que floreció en el primer tercio de ese siglo. Su obra monumental, *Trigonometric Series*, [3], ha ejercido una influencia profunda, convirtiéndose en una especie de Biblia para la escuela que Zygmund creó en Chicago, a cuya universidad se incorporó a finales de los años cuarenta. En colaboración con Alberto P. Calderón desarrolló la teoría de las integrales singulares, que ambos convirtieron en un instrumento fecundo por sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales, variable compleja y física matemática.

Todos los lunes de cada curso académico, a las cuatro menos cuarto de la tarde, en el aula 312 de Eckhard Hall, se reunía el Seminario de Análisis en torno a Zygmund y a Calderón. En él se presentaban las novedades sobre las series e integrales de Fourier y se formulaban proyectos y conjeturas. Algunos de los problemas que resistieron el paso de los años acabaron por convertirse en objetos del deseo.

Entre ellos figuraba uno especialmente querido por Zygmund, ya que provenía de sus primeros trabajos. Se trata del problema siguiente: sea ϕ : $[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\phi(0,0)=0$, una función monótona creciente separadamente en cada variable. Por ejemplo, la función

$$\phi(s,t)=s^\alpha t^\beta, \quad \text{con } \alpha,\beta>0.$$

Consideremos la colección biparamétrica B_ϕ de todos los paralelepípedos de $\mathbb{R}^3$, de lados paralelos a los ejes coordenados y cuyas dimensiones son de la forma: $s\times t\times\phi(s,t)$, $s,t\in\mathbb{R}^+$.



¿Cuál es el enunciado preciso del Teorema Fundamental del Cálculo para la familia B_ϕ?

Es claro que las propiedades de diferenciación de B_ϕ deben estar entre las de las familias B_2 y B_3. El teorema siguiente, ver [9], da la respuesta a la pregunta de Zygmund.

Teorema 6 *B_ϕ diferencia integrales de funciones que pertenecen localmente al espacio $L(\log^+ L)(\mathbb{R}^3)$. Es decir,*

$$\lim_{\substack{R\in B_\phi\\ R\Rightarrow x}} \frac{1}{\mu(R)}\int_R f(y)d\mu(y)=f(x)$$

en casi todo x siempre que $f\in L(\log^+ L)_{loc}$.

La demostración es una consecuencia del siguiente lema de recubrimiento:

Lema 2 *Dada una familia finita $\mathcal{F}=\{R_\alpha\}\subset B_\phi$ podemos seleccionar una subfamilia $\{R_j\}$ de manera que*

$$(i)\qquad \mu(\cup R_\alpha)\le C\mu(\cup R_j)\,;$$

$$(ii)\qquad \int_{\bigcup R_j}\exp\Big(\sum \chi_{R_j}(x)\Big)\,d\mu(x)\le C\mu(\cup R_j)\,,$$

donde $C<\infty$ es una constante absoluta.

Sea $\mathcal{L} = \{Q_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}^3}$ el retículo fundamental de $\mathbb{R}^3$. Dados tres enteros, $-\infty < m, n, p < +\infty$, designaremos por $Q_\nu^{m,n,p}$ al paralelepípedo obtenido a partir del cubo Q_ν, por medio de una homotecia centrada en el origen y de razones $2^m, 2^n$ y 2^p, respectivamente, en cada eje coordenado. Variando ν, m, n y p, obtenemos la familia de paralelepípedos diádicos. La geometría se clarifica si suponemos que los paralelepípedos de partida $\mathcal{F} = \{R_\alpha\}$ son diádicos, ya que estos tienen intersecciones "limpias". El caso general se reduce al diádico sin gran dificultad.

En la demostración escogeremos R_1 de manera que su dimensión vertical (es decir, la dada por $\phi(s,t)$) sea máxima entre los elementos de $\mathcal{F}$. Suponiendo que hemos elegido $R_1, \dots, R_{j-1}$, el siguiente, R_j, lo tomaremos de dimensión vertical máxima entre aquellos que satisfacen

$$\frac{1}{\mu(R_\alpha)} \int_{R_\alpha} \exp\left[\sum_{k=1}^{j-1} \chi_{R_k}(x)\right] d\mu(x) \le 1 + e^{-1}.$$

Los paralelepípedos $\{R_j\}_{j=1,\dots,M}$ obtenidos en este proceso verifican:

$$\begin{aligned}
&\int_{\bigcup_{j=1}^M R_j} \exp\left[\sum_{j=1}^{M} \chi_{R_j}(x)\right] d\mu(x) \le \\
&\le \int_{\bigcup_{j=1}^M R_j - R_M} \exp\left[\sum_{j=1}^{M-1} \chi_{R_j}(x)\right] d\mu(x) + e\int_{R_M} \exp\left[\sum_{1}^{M-1} \chi_{R_j}(x)\right] d\mu(x) \\
&\le \int_{\bigcup_{j=1}^{M-1} R_j} \exp\left[\sum_{1}^{M-1} \chi_{R_j}(x)\right] d\mu(x) + (1+e)\mu(R_M) \\
&\le \dots \le (1+e)\sum_{j=1}^{M} \mu(R_j) \le C\mu\left(\bigcup R_j\right),
\end{aligned}$$

donde $C = \frac{1+e}{1-e^{-1}-e^{-2}}$. Para cada $R \in \{R_\alpha\} - \{R_j\}$ tenemos que

$$\frac{1}{\mu(R)} \int_R \exp\left[\sum{}' \chi_{R_j}(x)\right] d\mu(x) \ge 1 + e^{-1},$$

donde hemos usado el símbolo $\sum'$ para designar la suma de las funciones indicadoras de los paralelepípedos elegidos R_j, cuya dimensión vertical es mayor que la de R. A continuación reordenemos

$$\sum{}' \chi_{R_j} = \chi_{R_1} + \dots + \chi_{R_p} + \chi_{R_{p+1}} + \dots + \chi_{R_q}$$

de manera que

- si $j = 1, \ldots, p$, s-dimensión de $R_j \geq s$-dimensión de R;
- si $j = p+1, \ldots, q$, t-dimensión de $R_j \geq t$-dimensión de R.

Por tanto,

$$\begin{aligned} 1 + e^{-1} &\leq \frac{1}{\mu(R)} \int_R \exp\left[{\sum}' \chi_{R_j}(x) \right] d\mu(x) \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \frac{1}{s!} \sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{p} \sum_{k_1,\ldots,k_s=p+1}^{q} \frac{\mu(R_{j_1} \cap \ldots \cap R_{k_s} \cap R)}{\mu(R)} . \end{aligned}$$

Observemos que si $R_1, \ldots, R_p$ es una familia de conjuntos, la suma

$$\sum_{(j_1,\ldots,j_r)\in\{1,\ldots,p\}^r} \mu\left(R_{j_1} \cap \ldots \cap R_{j_r}\right)$$

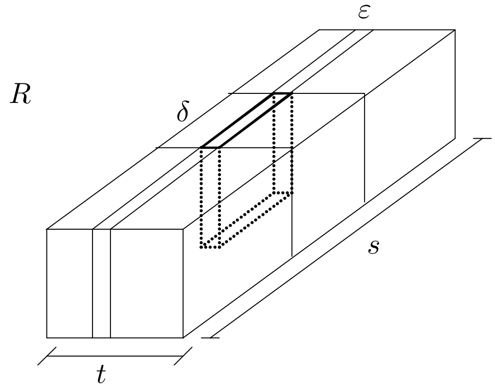
es igual a la integral

$$\int \left(\sum_{j=1}^{p} \chi_{R_j}(x) \right)^r dx.$$

La razón es que cada punto x que esté exactamente en k de tales conjuntos "aparece contado" k^r veces (tantas como secuencias $j_1, \ldots, j_r$ en las que cada índice es alguno de los k índices de los conjuntos que contienen a x). Exactamente el mismo principio hace que sea

$$\begin{aligned} &\int_R \left(\sum_1^p \chi_{R_j} \right) \left(\sum_{p+1}^q \chi_{R_k} \right) \\ &\quad = \sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{p} \sum_{k_1,\ldots,k_s=p+1}^{q} \mu\left(R_{j_1} \cap \ldots \cap R_{j_r} \cap \ldots \cap R_{k_s} \cap R\right) . \end{aligned}$$

Ahora bien, si $\mu(R_{j_1} \cap \ldots \cap R_{k_s} \cap R) \neq 0$, la intersección es como muestra la figura siguiente:



El bloque "δ" (respectivamente "ε") corresponde a la intersección de los $R_{j_1} \dots R_{j_r}$ (respectivamente $R_{k+1} \dots R_{k_s}$) con el paralelepípedo R. Por tanto,

$$\frac{\mu(R_{j_1} \cap \dots \cap R_{k_s} \cap R)}{\mu(R)} = \frac{\delta \times \varepsilon}{s \times t}\,.$$

Dado $A = (x_0, y_0, z_0) \in R$ consideremos los intervalos

$$I_A^1 = \{(x, y_0, z_0) \in R\}, \qquad I_A^2 = \{(x_0, y, z_0) \in R\}.$$

La monotonía de ϕ implica que

$$\frac{|R_{j_1} \cap \dots \cap R_{j_r} \cap I_A^1|}{|I_A^1|} = \frac{\delta}{s}, \qquad \frac{|R_{k_1} \cap \dots \cap R_{k_s} \cap I_A^2|}{|I_A^2|} = \frac{\varepsilon}{t}\,,$$

donde hemos utilizado $|\cdot|$ para designar la longitud (medida de Lebesgue unidimensional). Por tanto,

$$\begin{aligned} 1 + e^{-1} \quad &\le \quad \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{1 \le j_1, \dots, j_r \le p} \frac{|R_{j_1} \cap \dots \cap R_{j_r} \cap I_A^1|}{|I_A^1|} \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{p+1 \le k_1, \dots, k_s \le q} \frac{|R_{k_1} \cap \dots \cap R_{k_s} \cap I_A^2|}{|I_A^2|} \right) \\ &\le \quad \left[\frac{1}{|I_A^1|} \int_{I_A^1} \exp\left(\sum \chi_{R_j} \right) \right] \cdot \left[\frac{1}{|I_A^2|} \int_{I_A^2} \exp\left(\sum \chi_{R_j} \right) \right] \end{aligned}$$

Sean M_x, M_y las extensiones al espacio $\mathbb{R}^3$ de la función maximal unidimensional de Hardy-Littlewood en las direcciones respectivas de los ejes x, y. Tenemos que

$$\begin{aligned} R \subset & \left\{ M_x \left(\exp\left(\sum \chi_{R_j} \right) \right) \cdot M_y \left(\exp\left(\sum \chi_{R_j} \right) \right) \ge 1 + e^{-1} \right\} \\ \subset & \left\{ M_x \left(\exp\left(\sum \chi_{R_j} \right) \right) \ge \sqrt{1 + 1/e} \right\} \cup \left\{ M_y \left(\exp\left(\sum \chi_{R_j} \right) \right) \ge \sqrt{1 + 1/e} \right\}\,, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\mu\left(\bigcup R_\alpha \right) \le C \int_{\bigcup R_j} \exp\left[\sum \chi_{R_j}(x) \right] d\mu(x) \le C \mu\left(\bigcup R_j \right)\,,$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Epílogo: un problema abierto.

Cuando el autor de este artículo comunicó a A. Zygmund la demostración anterior, allá por el año 1978, recibió una afectuosa carta de contestación. Zygmund mostraba en ella su alegría por conocer, al fin, la solución de su problema. Sin embargo, con sentido del humor me decía que el paso de los años le había vuelto más ambicioso, y ahora también deseaba conocer la respuesta en dimensiones mayores,

$$s_1 \times s_2 \times \ldots \times s_n \times \phi(s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

con ϕ monótona en cada variable, $n \geq 3$.

¿Es cierto el teorema de diferenciación para B_ϕ en $L\left(\log^+ L\right)^{n-1}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$?

Pero esa pregunta no se la pude contestar entonces. Tampoco podría hacerlo ahora, ya que sigue siendo un lindo problema abierto.

Bibliografía

[1] Vitali: "Sui gruppo do puntie sulle funzioni di variabili reali", *Atti Accad. Sci. Torino* **43**, (1908), 75-92.

[2] Hardy, G.H., Littlewood, J.E.: "A maximal theorem with function-theoretic applications", *Acta Math.* **54** (1930), 81-116.

[3] Zygmund, A.: "Trigonometric Series", *Cambridge, Univ. Press*, Cambridge (1959).

[4] Saks, S.: "On the strong derivations of functions of an interval", *Fund. Math*, **25**, 235-252. (1935).

[5] Jessen, B., Marcinkiewicz, J., Zygmund, A.: "Note on the differentiability of multiple integrals", *Fund. Math.* **25** (1935), 217-234.

[6] Córdoba, A., Fefferman, R.: "A geometric proof of the strong maximal theorem", *Ann. of Math.* **102** (1975), 91-96.

[7] Córdoba, A.: "On the Vitali covering properties of a differentiation basis", *Studia Math.* **57** (1976), 91-96.

[8] López Melero, B.: "A negative result in differentiation theory", *Studia Math* **72** (1982), 173-182.

[9] Córdoba, A.: "Maximal functions: A proof of a conjecture of A. Zygmund", *Bull A.M.S.* (1979), 255-257.

[10] Soria, F.: "Examples and counterexamples to a conjecture in the theory of differentiation of integrals", *Ann. of Math.* **122** (1985), 65-69.

[11] Fefferman, R.: "Some weighted norm inequalities for Córdoba's maximal function", *American Journal of Math*, (1982), 1261-1264.

Antonio Córdoba Barba
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid.
28049 MADRID
correo electrónico: `antonio.cordoba@uam.es`