Las medallas Fields

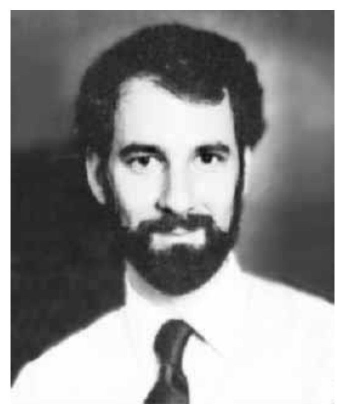
Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

Charles Louis Fefferman, la potencia del Análisis[1]

por

Antonio Córdoba y Diego Córdoba



Charles Fefferman

Charles Fefferman ha realizado contribuciones fundamentales en diversas áreas de las matemáticas entre las que podemos señalar el análisis armónico, varias variables complejas, ecuaciones diferenciales, mecánica cuántica y mecánica de los fluidos, pero también a la teoría de redes neuronales y la matemática financiera. Desde La Gaceta es oportuno destacar la influencia que ha tenido, y sigue teniendo, en el desarrollo de las Matemáticas en España: desde 1971 (su primer estudiante de doctorado fue español) hasta el 2004 (y de momento el último ha sido, este año, Jose Luis Rodrigo) ha dirigido la tesis a seis españoles. Otro dato interesante de resaltar es que entre la veintena de sus colaboradores aproximadamente la mitad son de nuestro país.

Nacido en Washington D.C. el 18 de abril de 1949, se licenció en la Universidad de Maryland en 1966 a la edad de 17 años. Luego, en 1969, leyó su tesis doctoral en Princeton, dirigida por Elias Stein y titulada *Inequalities for strongly singular convolution operators*. En la Universidad de Chicago se convirtió, en 1971, en el catedrático más joven de la historia académica de Estados Unidos, pero en 1974 ya estaba de vuelta en la Universidad de Princeton

[1]En este escrito hemos hecho uso del *Laudatio* del Prof. Fefferman en la ocasión de su investidura como Doctor *Honoris Causa* por la Universidad Autónoma de Madrid.

y desde entonces tiene su despacho en la undécima planta de Fine Hall. Ha recibido premios y honores entre los que cabe destacar:

1976 - Alan T. Waterman Award (primer científico en recibir este premio);

1978 - Medalla Fields (Congreso Internacional de Matemáticos en Helsinki);

1979 - Miembro de la Academia de Ciencias de Estados Unidos;

1990 - Doctor *Honoris Causa* por la Universidad Autónoma de Madrid;

1992 - Bergman Prize.

Sus publicaciones son de una gran originalidad, dureza e ingenio. No solamente ha demostrado conjeturas muy señeras, formuladas por los mejores matemáticos de otros tiempos, sino que ha abierto campos nuevos de actividad. Hasta ahora, Fefferman ha tenido como hábito de investigación concentrarse en uno o dos de los problemas considerados difíciles y básicos para el progreso de una rama de las Matemáticas, hacer una contribución fundamental, abrir nuevos caminos y perspectivas, dejar trabajo a los demás para muchos años y cambiarse rápidamente a otro tema.

En lo que sigue haremos una somera descripción de algunos de sus resultados, pero su producción contiene muchas otras gemas. Las demostraciones están llenas de cálculos difíciles e intrincados argumentos combinatorios. Sus trabajos, con toda su maestría, no son en absoluto de lectura fácil. Fefferman no es alguien que crea que existan caminos triviales hacia una verdad matemática que merezca la pena. Sus oberturas contienen casi siempre una estrategia ingeniosa, que en un principio puede parecer sencilla para tratar los problemas más difíciles, pero luego la trama se hace compleja y densa. Es una matemática que necesita de instrumentos muy afinados a los que exige registros profundos y exquisitos. Muchos de los pasajes de su música son muy bellos y han dado después origen a otras sinfonías en manos de sus discípulos y colegas.

Honoris Causa
por la UAM

El Análisis Armónico es una de las grandes áreas de la Matemática, cuyos orígenes se remontan al siglo XVIII y están relacionados con el estudio de los movimientos ondulatorios y con las teorías de la difracción de la luz y la propagación del calor. Uno de sus hitos fundamentales lo constituye la memoria presentada en el año 1807 por Joseph Fourier a la Academia de Ciencias Francesa y publicada en 1822 como un tratado sobre la Teoría Analítica del Calor. Fourier formuló la hipótesis de que toda función puede ser desarrollada en serie trigonométrica, en suma de senos y cosenos. Hipótesis controvertida que propició una revisión de las nociones fundamentales del Cálculo Diferencial, y el nacimiento de la moderna Teoría de la Medida e Integración.

En lenguaje moderno, a toda función integrable y periódica le podemos asociar una serie trigonométrica, su serie de Fourier, cuyos coeficientes miden la intensidad del espectro respecto del correspondiente armónico. ¿De qué manera es posible recomponer la función original a partir de su espectro de Fourier? En otras palabras: ¿en qué sentido converge la serie a la función de partida? ¿Cómo se reflejan la lisura y el tamaño de una función en sus coeficientes de Fourier? En torno a estas dos preguntas fundamentales ha girado una parte nada desdeñable de los resultados del Análisis Matemático. Sus aplicaciones impregnan a una mayoría de áreas de la Física y de las Matemáticas: desde la Teoría de los Números y las Ecuaciones Diferenciales, hasta la Espectroscopia, la Mecánica Cuántica o la Teoría de la Comunicación, por citar a algunas de ellas. Para darles respuesta se han creado operadores auxiliares y vicarios, tales como las funciones maximales y los operadores integrales singulares o pseudodiferenciales. Entre ellos merece una mención especial la transformada de Hilbert, que está estrechamente relacionada con las sumas parciales de la serie de Fourier, a las que controla.

En el año 1928 Marcel Riesz logró probar que la transformada de Hilbert es un operador que conserva los espacios de Lebesgue L^p, $1 < p < \infty$, y, por consiguiente, pudo dar una respuesta afirmativa, en el sentido de dichas métricas, a la pregunta formulada por Fourier un siglo antes. Este resultado básico propició un avance espectacular del análisis conseguido por una pléyade de excelente matemáticos. A finales de los años cuarenta llegó a la Universidad de Chicago Antoni Zygmund, un miembro destacado de la excelente cosecha de matemáticos polacos que había florecido durante el primer tercio del siglo XX. Zygmund fue el gran patriarca del Análisis Armónico moderno y creador de una escuela, la otra escuela de Chicago, que cuenta con discípulos por todo el mundo. Durante los años sesenta se desarrolló la Teoría de las Integrales Singulares, a partir del trabajo fundamental de Calderón y Zygmund, y se encontraron aplicaciones fecundas al estudio de las Ecuaciones Diferenciales y a la Variable Compleja.

En su tesis doctoral dirigida por E. Stein, un alumno de Zygmund, Charles Fefferman se interesó por uno de los problemas importantes del Análisis Armónico multidimensional: la convergencia de las sumas esféricas de las series de Fourier de varias variables. Su artículo titulado *The multiplier problem for the ball*, publicado en el año 1971 en *Annals of Mathematics*, fue una bomba que destruyó una de las conjeturas centrales del área. Fefferman utilizó de manera ingeniosa las propiedades de un conjunto plano de medida cero y que, sin embargo, contiene a una línea recta en cada dirección y puso de manifiesto el papel que la curvatura, o mejor *la geometría* del soporte de una distribución, desempeña en su espectro de Fourier. Su descubrimiento de que el multiplicador del disco no conserva los espacios de Lebesgue L^p, salvo el caso $p = 2$, acabó con un gran proyecto de la escuela, minó un paradigma tan establecido como la integral de Lebesgue, pero nos abrió las puertas de otros universos que, en gran medida, están aún por explorar.

Con el Teorema de Marcel Riesz y la Teoría de Calderón- Zygmund de los años sesenta, se sabía que las integrales singulares son operadores acotados en toda la escala de espacios L^p, excepto en los casos extremos $p = 1$ ó $p = \infty$. Ahora bien, estos dos casos son especialmente importantes. El primero, por ejemplo, corresponde a las funciones de masa total finita. Es natural considerar el espacio de Hardy H^1 como un sustituto de L^1: en el caso del disco unidad se trata de las funciones analíticas en el interior cuya restricción a la frontera del disco es integrable. Uno de los descubrimientos notables de Fefferman consistió en demostrar que el dual de H^1 es un espacio que había sido utilizado antes por F. John y L. Nirenberg: el espacio BMO de las funciones de oscilación media acotada. Lo constituyen las funciones que, en cada intervalo, difieren en promedio, de su valor medio, en una cantidad uniformemente acotada. Un ejemplo típico es el logaritmo del valor absoluto; otro es la suma de la serie cuyo término general es $\frac{cos(n^2x)}{n}$. Muchos problemas de H^1 se convierten, por dualidad, en cuestiones mucho más sencillas de elucidar en BMO. El Teorema de C. Fefferman nos despejó el camino hacia el conocimiento real de los espacios de Hardy y de las integrales singulares. Ha tenido ocupados, y todavía los tiene, a toda una legión de analistas que han explotado el yacimiento de sus aplicaciones.

En torno al año 1970 se obtuvieron dos resultados muy importantes del Análisis Microlocal: el Teorema de Calderón-Vaillancourt, sobre la acotación de los operadores pseudodiferenciales de símbolos exóticos y el Teorema de Egorov, que explica la interconexión existente entre los cambios canónicos de coordenadas y los símbolos de los operadores. Fefferman utilizó este flujo de ideas para sentenciar una cuestión básica de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales: la condición necesaria y suficiente para que una ecuación tenga siempre soluciones locales. Este trabajo es una de las cimas de la teoría y culmina un proceso iniciado por los descubrimientos de Hans Lewy, Louis Nirenberg y Francois Treves. Si importante es el resultado, no lo es menos el método: el uso del principio de incertidumbre de Heisenberg como una pauta para descomponer los símbolos de los operadores en partes casi-ortogonales. Método que fue puliendo en una teoría de paquetes de ondas y que utilizó en sus estimaciones precisas sobre la distribución de autovalores de operadores elípticos o en sus resultados sobre positividad y la desigualdad de Garding, que es una pieza clave de la Teoría Lineal de las Ecuaciones en Derivadas Parciales.

Uno de los éxitos de la Matemática del siglo XIX fue la Teoría de las Funciones Analíticas de una Variable Compleja que, aparte de su intrínseco interés matemático, es un instrumento que unifica el tratamiento analítico de fenómenos, en apariencia tan dispares, como el flujo de un fluido o el potencial creado por una distribución de cargas. Al gran Bernhard Riemann se debe la primera versión del Teorema de Uniformización: todo dominio propio del plano, simplemente conexo, es decir, sin agujeros, es equivalente al disco unidad por medio de una transformación bianalítica. El caso de las funciones analíticas de varias variables complejas presenta características nuevas. En primer lugar, los dominios naturales de definición no son todos los subdominios de $\mathbb{C}^n$, sino una subclase de ellos que están caracterizados por una condición de convexidad. Un problema fundamental es el de clasificarlos, entender cuándo dos de estos dominios de holomorfía o pseudoconvexos son equivalentes por medio de una aplicación biholomorfa. A finales del siglo XIX el gran matemático francés Henri Poincaré estableció un programa de clasificación, basado en la hipótesis de que una tal aplicación bianalítica siempre se puede continuar, de manera diferenciable, hasta la frontera de un dominio estrictamente pseudoconvexo. Este resultado fundamental fue demostrado por Fefferman en 1974 y publicado en *Inventiones Mathematicae*.

Fefferman estudió el núcleo de Bergman de un dominio estrictamente pseudoconvexo Ω, que da la proyección del espacio $L^2(\Omega)$ en el subespacio de las funciones analíticas, encontró un desarrollo asintótico preciso de su singularidad cerca de la diagonal y observó que la métrica asociada al núcleo de Bergman es invariante para las transformaciones bianalíticas: sus líneas geodésicas resultan ser una base natural para obtener una descripción geométrica de la correspondencia entre las fronteras de tales dominios. Lo que le indujo a buscar descripciones algebraicas de los invariantes locales y su relación con un operador diferencial asociado, la ecuación de Monge-Ampére, que es también conservado por estas transformaciones.

Desde principios de los 80 hasta hoy Fefferman ha estado dedicado fundamentalmente a dos proyectos (sin dejar a un lado otros apasionantes temas de Matemática Financiera, Geometría Diferencial o Redes Neuronales), a saber: la Mecánica Cuántica y la Mecánica de Fluidos. El objetivo del primer proyecto es la fundamentación matemática rigurosa de la Mecánica Estadistica Cuántica, y ha obtenido resultados sobre la Teoría de la Estabilidad de la Materia y cálculos precisos de la energía de un átomo.

En el AMS-RSME Meeting 2003

La estabilidad de la materia es una de las cuestiones que nos permiten evaluar el estado del conocimiento matemático riguroso acerca de como la Mecánica Cuántica describe al mundo real. Dados N electrones cuantizados y M núcleos, sometidos al potencial de Coulomb y a diversos campos magnéticos y con una energía cinética cuantizada teniendo o no en cuenta, según el caso, la correción relativista, se trata de decidir si el sistema es estable o sí, por el contrario, explotará su energía. A partir de los resultados pioneros de F. Dyson y E. Lenard se abrió una línea natural de trabajo en la que E. Lieb y W.

Thirring consiguieron una estimación fundamental que contribuyó a entender mejor el trabajo de Dyson y Lenard y a centrar el problema. Luego Fefferman (en diversas publicaciones con R. de la Llave, L. Seco, J. Fröhlich y G. Graf) ha conseguido avanzar con Hamiltonianos más complicados que incluyen la relatividad y los campos magnéticos. Siguiendo con el tono de este artículo, nos parece apropiado señalar que Pedro Balodis, un nieto académico español de C. Fefferman, ha publicado recientemente un trabajo titulado *The proof of Scott's correction of matter* que mejora, en un sentido muy interesante, las estimaciones hasta ahora conocidas.

Un átomo no relativista de carga nuclear Z fijada en el origen de coordenadas y un número N de electrones en las posiciones respectivas $x_i \in R^3$, $(i = 1, 2, ..., N)$ viene descrito por medio del Hamiltoniano

$$H_{Z,N} = \sum_{i=1}^{N}(-\Delta_{x_i} - \frac{Z}{|x_i|}) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{1}{|x_i - x_j|}$$

que actua en el espacio de Hilbert H de las funciones antisimétricas de $L^2(R^{3N})$ (para simplificar la expresión la carga del electron y la constante de Planck se han tomado iguales a uno y tampoco se ha introducido el spín, porque no involucra mayor dificultad en la discusión de que ahora se trata).

La energía del estado fundamental de este sistema está dada por:

$$E(Z) = \inf_{N\geq 0} E(Z, N), \qquad E(Z, N) = \inf_{\phi\in H, \|\phi\|=1} < H_{Z,N}\phi, \phi > .$$

Cuando Z crece $E(Z)$ admite un desarrollo asintótico de la forma

$$E(Z) = -C_{TF}Z^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{8}Z^2 - C_s Z^{\frac{5}{3}} + O(Z^{\frac{5}{3}-\epsilon})$$

para un cierto $\epsilon > 0$.

El estudio de la función $E(Z)$ se remonta a los tiempos de los pioneros de la Cuántica. El primer término fue introducido por Thomas y Fermi (1925) y demostrado rigurosamente por Lieb y Simon (1977). El término Z^2 fue descubierto por Scott y demostrado por Hughes (un alumno de Fefferman), mientras que la correción de Schwinger, de orden $Z^{\frac{5}{3}}$, fue demostrada por Fefferman y Seco.

¿Podremos alguna vez reducir la Química a las Matemáticas? ¿Es posible observar el sistema periódico en el desarrollo de la función $E(Z)$? Se trata de preguntas importantes que no sabemos responder y a las que Fefferman ha prestado también atención. En sus trabajos [C20] se conjetura que el siguiente término del desarrollo tiene un caracter oscilatorio:

$$\psi_Q(Z) = \sum \frac{2l+1}{\frac{1}{\pi}\int[V_{TF}^Z(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}]^{\frac{-1}{2}}dr} \cdot \mu(\frac{1}{\pi}\int[V_{TF}^Z(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}]^{\frac{1}{2}}dr)$$

donde $\mu(x) = dist(x, Enteros) - \frac{1}{12}$ y V_{TF}^Z es el potencial de Thomas-Fermi para un átomo de carga Z. El resultado de Fefferman y sus colaboradores se resume en las estimaciones:

$$|\Psi_Q| \ll Z^{\frac{3}{2}}, \qquad \limsup_{Z\to\infty} |Z^{-\frac{3}{2}}\Psi_Q(Z)| > 0$$

y hace uso de la analogía entre la suma $\Psi_Q(Z)$ y el término de error que aparece al contar puntos del retículo dentro de un círculo, abriendo una sugestiva línea de trabajo para el futuro.

El interés de Fefferman por la Mecánica de Fluidos empezó a principios de los 90, cuando publicó dos artículos en colaboración con P. Constantin y A. Majda en los que abordaron el problema de la existencia de singularidades, en dimensión tres, de la ecuación de Navier-Stokes. Combinando técnicas analíticas de integrales singulares con argumentos geométricos probaron que si la dirección del vector vorticidad $\xi(x) = \frac{\omega(x)}{|\omega(x)|}$ (la vorticidad es por definición el rotacional de la velocidad del fluido) se mantiene lisa en regiones donde la vorticidad es alta, entonces no se puede producir una singularidad. Estos resultados iluminan la naturaleza de los posibles escenarios geométricos donde la dinámica del fluido pueda producir singularidades, permitiendo que nos centremos en el estudio de casos menos generales.

Uno de los problemas más importantes en la Mecánica de Fluidos en los que Fefferman ha trabajado consiste en deducir directamente de los modelos físicos la formación de singularidades para entender fenómenos como la turbulencia, la formación de frentes de aire frío y caliente, la ruptura de gotas, etc. Desde que hace mas de 200 años se formularon las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes no se ha podido demostrar la explosión de soluciones, en dimensión tres, en tiempo finito. No obstante el ejemplo más simple, que cualquiera puede experimentar en casa, es la formación de una gota de agua y su posterior ruptura. En otras palabras, un dominio $\Omega(t)$ ocupado por un fluido incompresible cambia su topología: inicialmente es simplemente conexo y posteriormente puede evolucionar a un dominio no conexo. Este fenómeno atrajo la atención de los científicos desde principios del siglo XIX, pudiéndonos remontar a las observaciones experimentales de Savart (1833), a los trabajos de Plateau (1863) y sobre todo al primer estudio analítico de Rayleigh (1879). Los experimentos muestran que la viscosidad desempeña un papel fundamental en la geometría de la ruptura de las gotas, que es puntual en el caso poco viscoso (por ejemplo en el agua), mientras que en el caso muy viscoso se observa la formación de filamentos muy delgados que finalmente desaparecen después de alcanzar una delgadez próxima al tamaño molecular. Hasta la fecha, todos los resultados existentes en la literatura hacían referencia a modelos o a límites asintóticos derivados del problema original. En [C25], Fefferman y algunos de sus colaboradores españoles hemos abordado el análisis de los filamentos que se forman durante la evolución de los chorros de un fluido muy viscoso, demostrando que dichos filamentos no pueden colapsar uniformemente en tiempo finito en la dinámica de las ecuaciones de Navier-Stokes complementada con las fuerzas de tensión superficial. Se trata del primer resultado analítico tridimensional para el problema de singularidades con interfases.

REFERENCIAS

[C1] C. FEFFERMAN, Inequalities for strongly singular convolution operators, *Acta Math.* **124** (1970), 9–36.

[C2] C. FEFFERMAN, The multiplier theorem for the ball, *Ann. of Math.* (2) **94** (1971), 330–336.

[C3] C. FEFFERMAN, Characterizations of bounded mean oscillation, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), 587–588.

[C4] C. FEFFERMAN (CON E. M. STEIN), H^p spaces of several variables, *Acta Math.* **129** (1972), 137–193.

[C5] C. FEFFERMAN (CON R. BEALS), On local solvability of linear partial differential equations, *Ann. of Math.* (2) **97** (1973), 482–498.

[C6] C. FEFFERMAN, Pointwise convergence of Fourier series, *Ann. of Math.* (2) **98** (1973), 551–571.

[C7] C. FEFFERMAN, The Bergman Kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, *Invent. Math.* **26** (1974), 1–65.

[C8] C. FEFFERMAN, Monge-Ampere equations, the Bergman Kernel and geometry of pseudo-convex domains, *Ann. of Math.* (2) **103** (1976), 395–416.

[C9] C. FEFFERMAN (CON D. H. PHONG), The uncertainty principle and sharp Garding inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981) no. 3, 285–331.

[C10] C. FEFFERMAN, The Uncertainty Principle, *Bull. Amer. Math. Soc.* **9** (1983) no. 2, 129–206.

[C11] C. FEFFERMAN (CON H. DONNELLY), L^2-cohomology and index theorem for the Bergman metric, *Ann. of Math.* (2) **118** (1983), 593–618.

[C12] C. FEFFERMAN, The atomic and molecular nature of matter, *Rev. Mat. Iberoam.* **1** (1985), no. 1, 1–44.

[C13] C. FEFFERMAN (CON A. SÁNCHEZ-CALLE), Fundamental Solutions for Second-Order Subelliptic Operators, *Ann. of Math.* (2) **124** (1986), no. 2, 247–272.

[C14] C. FEFFERMAN (CON R. DE LA LLAVE), Relativistic Stability of Matter I, *Rev. Mat. Iberoamericana* **2** (1986), no. 1-2, 119–213.

[C15] C. FEFFERMAN (CON H. DONNELLY), Nodal Sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds, *Invent. Math.* **93** (1988), no. 1, 161–183.

[C16] C. FEFFERMAN (CON L. SECO), An upper bound for the number of electrons in a large ion, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **86** (1989), no. 10, 3464–3465.

[C17] C. Fefferman (con L. Seco), On the Dirac and Schwinger Corrections to the Ground-State Energy of an Atom, *Adv. Math.* **107** (1994), no. 1, 1–185.

[C18] C. Fefferman (con P. Constantin), Direction of Vorticity and the Problem of Global Regularity for the Navier-Stokes Equations, *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), no. 3, 775–789.

[C19] C. Fefferman (con P. Constantin), Scaling exponents in fluid turbulence: some analytic results, *Nonlinearity* **7** (1994), no. 1, 41–57.

[C20] C. Fefferman (con A. Córdoba y L. Seco), A Trigonometric Sum Relevant to the Non-Relativistic Theory of Atoms, *Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A.* **91** (1994), no. 13, 5776–5778.

[C21] C. Fefferman, Reconstructing a neural net from its output, *Rev. Mat. Iberoamericana* **10** (1994), no. 3, 507–555.

[C22] C. Fefferman (con P. Constantin y A. Majda), Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3D Euler equations. *Commun. Partial Differential Equations* **21** (1996), no. 3-4, 559-–571.

[C23] C. Fefferman (con D. Córdoba), On the collapse of tubes carried by 3D incompressible flows, *Comm. Math. Phys.*, **222** (2001), no. 2, 293–298.

[C24] C. Fefferman (con D. Córdoba y J.L. Rodrigo), Almost sharp fronts for the surface quasi-geostrophic equations, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **101** (2004), no. 9, 2687–2691.

[C25] C. Fefferman (con A. Córdoba, D. Córdoba y M. Fontelos), A geometrical constraint for capillary jet breakup, *Adv. Math.* **187** (2004), no. 1, 228–239.

[C26] C. Fefferman (con D. Córdoba y R. de la Llave), On squirt singularities in hydrodynamics, *SIAM J. Math. Analysis*, **36** (2004), no. 1, 204–213.

Antonio Córdoba
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
Cantoblanco, 28049 Madrid
Correo electrónico: `Antonio.Cordoba@uam.es`

Diego Córdoba
Departamento de Matemáticas
Instituto de Matemáticas y Física Fundamental
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
C/Serrano 123, 28040 Madrid
Correo electrónico: `dcg@imaff.cfmac.csic.es`