

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Variable Real

Antonio Córdoba

(Transcripción por Manuel Mellado Cuerno y Arturo Rodríguez Fanlo)

1º Cuatrimestre del curso 2016-2017

manuel.mellado@estudiante.uam.es
arturo.rodriguezfanlo@estudiante.uam.es

Índice general

1. Introducción.	5
1.1. Análisis armónico.	5
1.2. Notas.	10
2. Espacios de funciones.	11
2.1. Funciones Periódicas.	11
2.2. Espacios $C^k(\mathbb{T}^1)$	13
2.3. Espacios L^p	13
2.3.1. Desigualdad de Hölder.	14
2.3.2. Desigualdad de Minkowski.	17
2.4. Convolución.	21
2.5. Módulo de continuidad.	23
3. El Teorema Fundamental del Cálculo.	29
3.1. Lema de recubrimiento de Vitali.	29
3.2. Función Maximal de Hardy-Littlewood.	29
3.3. Teorema de Diferenciación (Lebesgue).	30
3.4. Teorema de interpolación (Marcinkiewicz):	33
3.5. Convolución.	35
4. Ejemplos de series de Fourier.	39
4.1. Los detalles de un ejemplo paradigmático	44
5. Propiedades. Aproximaciones. L^2.	53
5.1. Propiedades de los coeficientes de Fourier.	53
5.2. Fórmula para las sumas parciales.	56
5.2.1. Representación gráfica.	57
5.3. Núcleos de Féjer.	59
5.4. Teorema de Féjer.	61
5.5. La Teoría L^2	64
5.6. Notas.	66

6. La convergencia puntual.	69
6.1. Lema de Riemann-Lebesgue.	69
6.2. Teorema de Localización.	70
6.3. Convergencia puntual de la serie de Fourier. Criterio de Dini. . .	72
6.4. Fenómeno de Gibbs.	75
6.5. Convergencia puntual: el estado del arte.	80
7. Aplicaciones de las Series de Fourier.	81
7.1. Una función continua que carece de derivada en todos los puntos.	81
7.2. El problema de los isoperímetros.	83
8. La Integral de Fourier.	91
8.1. Los espacios de funciones.	92
8.1.1. Espacios L^p	93
8.1.2. Funciones Lisas.	95
8.2. Aproximaciones de la identidad (núcleos de sumabilidad).	98
8.3. La transformada de Fourier de las funciones de $S(\mathbb{R}^n)$	99
8.4. La fórmula de Plancherel: Teoría $L^2(\mathbb{R}^n)$	104
8.5. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$: el lema de Riemann- Lebesgue.	108
8.5.1. La fórmula de inversión en el caso $L^1(\mathbb{R}^n)$:	109
8.6. La fórmula de sumación de Poisson	110

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Análisis armónico.

En este curso vamos a estudiar un método del análisis matemático que posee una amplia gama de aplicaciones: ecuaciones en derivadas parciales, probabilidad, teoría de los números, mecánica cuántica y óptica, por citar algunas de entre ellas. El núcleo del curso estará centrado en torno a las series e integrales de Fourier, así denominadas en honor del matemático francés Joseph Fourier cuya obra, titulada Teoría Analítica del Calor, marcó un hito en el desarrollo del pensamiento científico.

Un modelo sencillo, aunque paradigmático, del problema de la transmisión del calor es el siguiente: consideramos una barra metálica delgada de longitud L cuyas propiedades físicas sean constantes en cada sección transversal. Es decir, podemos parametrizar la barra con la coordenada x , $0 \leq x \leq L$, y postulamos que la densidad $\rho(x)$, conductividad calorífica $k(x)$ y calor específico $c(x)$, son funciones de la variable x .

Imaginemos que la barra está rodeada de un material refractario, aislante para el calor, de manera que no hay intercambio calorífico entre ella y el medio que la rodea. Con un sistema adecuado de termómetros podemos conocer la distribución espacial de las temperaturas en el instante inicial, $u(x, 0) = f(x)$, y nos preguntamos por la evolución temporal de esa distribución de temperaturas $u(x, t)$, $0 \leq x \leq L, t \geq 0$.

De una manera implícita, en las consideraciones anteriores, hemos supuesto toda una serie de hipótesis obtenidas a través de la experimentación física. A saber: el concepto de temperatura; el hecho de que el calor es una forma de la energía y de que la cantidad de calor necesaria para aumentar la temperatura de un cuerpo, es directamente proporcional a su masa y a la diferencia entre las temperaturas final e inicial. Por otro lado, es de general conocimiento que la energía que recibimos de una fuente calorífica no sólo depende de la diferencia de temperaturas sino también de nuestra proximidad a ella. No es difícil imaginar experimentos que cuantifiquen esta dependencia

y nos permitan obtener una ley.

Si designamos por $\Delta Q(x, t)$ a la cantidad de calor que fluye a través de la sección x de la barra en el tiempo t , entonces:

$$\Delta Q(x, t) = -k(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = -k(x)u_x(x, t),$$

donde $k \geq 0$, es una función del punto x que llamaremos conductividad. El signo menos merece una explicación: refleja el hecho de que el calor fluye de las partes calientes a las frías. Si $u_x > 0$, entonces u es creciente en el punto x y el calor fluye en el sentido negativo del eje x ; por el contrario, si $u_x < 0$, entonces u es decreciente y el flujo de calor lo es hacia la derecha, ó en el sentido positivo de las abscisas.

Por lo tanto, si aislamos el trozo de la barra comprendido entre las coordenadas x_1 y x_2 ($x_1 < x_2$), y nos preguntamos por la cantidad de calor ΔQ que ha obtenido dicho trozo entre los tiempos t_1 y t_2 , obtenemos, habida cuenta de que el intercambio calorífico tiene lugar sólo en los extremos, la fórmula integral siguiente:

$$\Delta Q = \int_{t_1}^{t_2} (k(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - k(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial u}{\partial x}) dx dt \quad (1.1)$$

Existe otra manera de calcular dicho incremento basada en el concepto de calor específico:

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)c(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1)) dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho(x)c(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx dt \quad (1.2)$$

Si igualamos las dos expresiones (1.1) y (1.2) y suponemos que todas las funciones involucradas ρ , c , k , u_t , u_x , $(ku_x)_x$ son continuas, entonces el teorema fundamental del Cálculo nos permite obtener la ley diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial u}{\partial x}) = c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t},$$

que es la ecuación del calor.

En particular, si la barra es homogénea su densidad ρ , calor específico c y conductividad k son constantes y, por tanto, la ecuación anterior puede escribirse en la forma:

$$u_t - \frac{k}{c\rho} u_{xx} = 0,$$

que queda reducida a la forma canónica

$$v_t - v_{xx} = 0$$

si hacemos un cambio de relojes, es decir $v(x, t) = u\left(x, \frac{c\rho}{k}t\right)$.

A continuación observemos también que esta ecuación tiene una homogeneidad de tipo parabólico, lo que significa que es invariante respecto a la

siguiente familia de dilataciones del espacio-tiempo: $(x, t) \longrightarrow (\lambda x, \lambda^2 t)$, $\lambda > 0$. Luego $v_\lambda(x, t) = v(\lambda x, \lambda^2 t)$ es también solución de la ecuación del calor (si lo es v) para cualquier valor del parámetro positivo λ . Esta propiedad nos permite cambiar la escala y reducir el problema al caso de una varilla de longitud $L = 1$.

Consideremos pues la ecuación $u_t - u_{xx} = 0$ y tratemos de encontrar algunas soluciones particulares. El método de separación de variables consiste en buscar las soluciones que se desacoplan en producto de una función del espacio por otra del tiempo: $u(x, t) = V(x)W(t)$.

Si sustituimos en la ecuación obtenemos:

$$V(x)W'(t) - V''(x)W(t) = 0,$$

luego

$$\frac{V''(x)}{V(x)} = \frac{W'(t)}{W(t)} = \lambda, \text{ que es una constante.}$$

Lo que nos da:

$$\begin{aligned} W(t) &= Ae^{\lambda t}, \quad A \in \mathbb{C} \\ V(x) &= Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad B, C \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Entonces como posibles soluciones obtenemos:

$$u(x, t) = (ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x})e^{\lambda t}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Ahora bien, las funciones u , anteriormente halladas, correspondientes a valores positivos del parámetro λ no tienen sentido físico, ya que la temperatura de un sistema aislado, sin fuentes de energía internas, no pueden tender a infinito con el tiempo. Las soluciones que provienen de los valores negativos del parámetro $\lambda = -\mu^2$ tienen la forma:

$$(a \cos(\mu x) + b \operatorname{sen}(\mu x))e^{-\mu^2 t}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Una de las propiedades importantes de las ecuaciones lineales es que la combinación lineal de soluciones es también solución; lo que a veces se denomina pomposamente como el "principio de la superposición de soluciones", y, según el cual, hemos obtenido una ingente familia de ellas, a saber:

$$\mathcal{F} = \left\{ \sum_j (a_j \cos(\mu_j x) + b_j \operatorname{sen}(\mu_j x)) e^{-\mu_j^2 t} \right\},$$

donde a_j , b_j y μ_j son números reales arbitrarios.

Volviendo al modelo, una cuestión interesante consiste en resolver la ecuación $u_t - u_{xx} = 0$ conocida la temperatura inicial $u(x, 0) = f(x)$. Por ejemplo: si $f(x) = 1 + \cos(\mu x)$ entonces $u(x, t) = 1 + \cos(\mu x)e^{-\mu^2 t}$ es la solución.

En general, seríamos capaces de resolver el problema si es que toda temperatura inicial $f(x)$ pudiera ser escrita como una suma de funciones trigonométricas. Suponiendo que esto fuese así, resulta también natural preguntarse si esa suma es única o, en otras palabras, si hay o no redundancias en la familia \mathcal{F} anteriormente descrita.

Comencemos por esta última cuestión: Sea λ un número real que no es entero ($\lambda \notin \mathbb{Z}$), tenemos la identidad:

$$e^{2\pi i \lambda x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda} - 1}{2\pi i(\lambda - n)} e^{2\pi i n x}, \quad 0 < x < 1.$$

Este desarrollo es un ejemplo de las series de Fourier que consideraremos en el curso, de manera que la identidad anterior será un caso particular de la teoría que vamos a desarrollar en los capítulos sucesivos. Sin embargo, se trata de un buen ejemplo y sugerimos como ejercicio demostrarlo directamente para ir haciendo dedos.

Seguiremos pues con nuestro análisis "heurístico" de la ecuación del calor. El ejercicio propuesto nos indica que nos basta con las exponenciales

$$e^{2\pi i n x}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Toda combinación lineal de exponenciales arbitrarias

$$\sum a_j e^{-i\lambda_j x}$$

puede formalmente ser escrita como una combinación lineal de exponenciales con frecuencias $\lambda = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Supongamos con Fourier que la función f tiene un desarrollo trigonométrico $f(x) = \sum a_k e^{2\pi i k x}$. Las relaciones de ortogonalidad satisfechas por las funciones $\{e^{2\pi i k x}\}$:

$$\int_0^1 e^{2\pi i k x} e^{-2\pi i m x} dx = 1, \text{ si } k = m; \quad 0, \text{ si } k \neq m,$$

nos dan las siguientes identidades:

$$\int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 \left(\sum a_k e^{2\pi i k x} \right) e^{-2\pi i n x} dx = \sum a_k \int_0^1 e^{2\pi i (k-n)x} dx = a_n.$$

Luego, el coeficiente a_n no es arbitrario, sino que, por el contrario, está determinado por la función f a través de la fórmula:

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \hat{f}(n).$$

Obsérvese que en la deducción heurística anterior hemos intercambiado alegremente las sumas (infinitas) con las integrales. También hemos introducido la notación usual $\hat{f}(n)$ para designar a los coeficientes de Fourier de la función integrable f .

Es decir, dada f (integrable) podemos escribir su serie de Fourier:

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx},$$

donde

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(y)e^{-2\pi iny} dy.$$

En su célebre tratado sobre la propagación del calor, J. Fourier hizo la hipótesis de que la serie anterior permite recuperar a la función f . Ahora bien, esta hipótesis no es evidente y fue sometida a críticas razonables por los coetáneos de Fourier.

Por ejemplo: si f no es periódica ($f(1) \neq f(0)$) resulta harto dudoso que una suma de funciones periódicas sea no periódica; además, la serie anterior, en general, no convergerá absolutamente y su suma puede no estar definida en algunos puntos, como así demostró du Boys Raymond. Por otro lado, cuando Fourier elaboró su teoría la noción vigente de integral era la de Riemann que es muy rígida a la hora de intercambiar los límites con las integrales, de manera que las críticas de los matemáticos contemporáneos de Fourier no eran fútiles. De hecho, H. Lebesgue estuvo especialmente motivado en la construcción de su integral, por el problema de la convergencia de las series trigonométricas. Se puede afirmar que una parte nada desdeñable del análisis matemático del siglo XX, está directamente motivado por el propósito de dar sentido a la hipótesis de Fourier.

En cuanto al modelo de la propagación del calor observamos que

$$u(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx} e^{-4\pi^2 n^2 t}$$

debe satisfacer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \hat{f}(0) = \int_0^1 f(x) dx$$

que es una predicción razonable, compatible con las observaciones experimentales: después de un tiempo, la temperatura se vuelve uniforme sobre la barra y el principio de la conservación de la energía indica que dicho límite debe ser $\int_0^1 f(x) dx$ precisamente.

Sin embargo, la solución puede también escribirse como:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 f(y)e^{-2\pi ny} dy \right) e^{2\pi inx} e^{-4\pi^2 n^2 t} = \int_0^1 f(y) \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi in(x-y)} dy = \\ &= \int_0^1 f(y) C_t(x-y) dy \end{aligned}$$

Donde

$$C_t(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 t^2} e^{2\pi inx} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nx) e^{-4\pi^2 t^2}.$$

Uno de los resultados que veremos en este curso (la fórmula de sumación de Poisson) permite escribir la identidad:

$$C_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-n|^2}{2t}}.$$

En particular, como $f(x) \geq 0$ ($f \neq 0$) resulta que

$$u(x, t) = \int_0^1 f(y)C_t(x-y)dy > 0$$

para todo $x \in [0, 1]$, $t > 0$, a pesar de que f pueda ser cero fuera de un entorno pequeño. En otras palabras, según el modelo, el calor se propaga con velocidad infinita, lo que contradice a la teoría de la relatividad. Sin embargo, a pesar de este inconveniente, el modelo tiene su rango de validez como buena aproximación al fenómeno.

1.2. Notas.

1. Históricamente, el origen de las series de Fourier se remonta al siglo XVIII y está relacionado con otro modelo importante de la Física matemática: la teoría de la propagación de las ondas. En su tratado "Sur les cordes vibrantes" (1753) Daniel Bernouilli introdujo la hipótesis de que la solución general del problema de la vibración de una cuerda puede ser descrita por medio de una serie trigonométrica. Euler y d'Alambert, entre otros, polemizaron con Bernouilli sosteniendo otros puntos de vista. En realidad, Fourier, 1822, no hizo sino reabrir ésta polémica.
2. El problema que hemos señalado en nuestro modelo del calor, acerca de su propagación con velocidad infinita, puede ser soslayado en otros modelos no-lineales. Por ejemplo, en aquellos donde la conductividad k es una función de la temperatura u ($k(u) = u^\gamma$). Pero esto es ya asunto de investigación actual.

Capítulo 2

Espacios de funciones.

En la introducción vimos como en el plan de Fourier se postula que toda función es representable por medio de series trigonométricas y que ésto, lejos de ser evidente, ha sido un motor del desarrollo del análisis matemático y ha propiciado la discusión y precisión de conceptos tales como los de función e integración, entre otros. Es por tanto natural que antes de proseguir con el análisis armónico estudiemos algunos de los espacios de funciones en los que la acción se desarrolla.

2.1. Funciones Periódicas.

Definición 1. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es **periódica** de periodo L ($L > 0$) si verifica que $f(x+L) = f(x)$ quienquiera que sea el punto $x \in \mathbb{R}$.

Es claro que si f es periódica de periodo L entonces $g(x) = f(Lx)$ es periódica de periodo igual a 1: $g(x+1) = f(L(x+1)) = f(Lx+L) = f(Lx) = g(x)$. Luego $f(y) = g(L^{-1}y)$, es decir: una función de periodo L se convierte en otra de periodo 1 con un cambio lineal de coordenadas $x = L^{-1}y$; por tanto, al estudiar el espacio de las funciones periódicas podemos reducirnos al caso de periodo $L = 1$ sin pérdida de generalidad.

Ejemplos:

1. Sea $f(x) = (x)$ parte fraccionaria de x .



Figura 2.1.

2. $f(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z}), \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$



Figura 2.2.

Una de las características importantes de estas funciones es que están determinadas si conocemos sus valores en el intervalo de longitud 1. La gráfica en toda la recta se obtiene trasladando la del intervalo. En los ejemplos anteriores esto resulta obvio con el intervalo $[0, 1)$, pero cualquier otro $[a, a + 1)$ también valdría. Por ejemplo: $[-1/2, 1/2)$ nos da para la función $f(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ la gráfica:

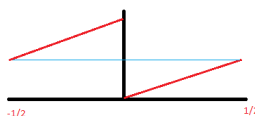


Figura 2.3.

Que produce por traslación la misma gráfica que la obtenida a partir del otro intervalo fundamental $[0, 1)$.

La noción de función periódica sugiere naturalmente la siguiente relación de equivalencia entre los números reales: $x \simeq y$ si y solo si $x - y \in \mathbb{Z}$. El conjunto cociente \mathbb{R}/\simeq es el toro \mathbb{T}^1 que coincide con la circunferencia unidad \mathbb{S}^1 (en dimensiones mayores $n \geq 2$, $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^1 \times \dots \times \mathbb{T}^1 \neq \mathbb{S}^n$ y tendremos dos análisis distintos).

Consideremos la proyección:

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\simeq \simeq \mathbb{T}^1$$

$$\theta \longrightarrow (\cos(2\pi\theta), \text{sen}(2\pi\theta))$$

Donde una función arbitraria $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ la composición $F = f \circ P$ es periódica de periodo 1. Recíprocamente, toda función periódica $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ (de periodo 1) se factoriza a través de \mathbb{T}^1 , es decir, existe una única $g : \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $G(\theta) = g(p(\theta)) = g(\cos(2\pi\theta), \text{sen}(2\pi\theta))$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

2.2. Espacios $C^k(\mathbb{T}^1)$.

Definición 2. Dado un entero $k \geq 0$ el espacio $C^k(\mathbb{T})$, ($\mathbb{T} = \mathbb{T}^1$), consiste en el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ que poseen k derivadas continuas.

El caso $C^0(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$ corresponde a las funciones continuas $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$. Luego $C^k(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} : \text{tales que } f, f^1, \dots, f^{(k)} \in C^0(\mathbb{T})\}$. Existe una identificación natural $C^k(\mathbb{T}) \simeq C^k(\mathbb{R}) \cap \{\text{funciones periódicas de periodo 1}\}$.

Cada espacio $C^k(\mathbb{T})$ tiene una estructura lineal obvia: la suma de dos funciones de C^k , así como el producto de una función de C^k por un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, son también elementos de $C^k(\mathbb{T})$. Además de ser espacios vectoriales, podemos definir en ellos una topología por medio de las normas:

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{T})} = \sup_x \left(\sum_{j=0}^k |f^{(j)}(x)| \right)$$

siendo la distancia $d_k(f, g) = \|f - g\|_{C^k(\mathbb{T})}$.

Es un ejercicio sencillo comprobar que esta definición de distancia hace de $C^k(\mathbb{T})$ un espacio métrico completo: toda sucesión de Cauchy en C^k tiene límite. La razón es que la noción de distancia d_k implica que la convergencia es uniforme y el límite uniforme de funciones continuas es así mismo continua (los detalles se dejan como ejercicio).

Obsérvese que si $j > k$ entonces $C^k(\mathbb{T}) \supsetneq C^j(\mathbb{T})$; luego hemos construido toda una escala de espacios de funciones:

$$C^0(\mathbb{T}) \supset C^1(\mathbb{T}) \supset C^2(\mathbb{T}) \supset \dots$$

La intersección de todos ellos $C^\infty(\mathbb{T}) = \bigcap_{j=0}^{\infty} C^j(\mathbb{T})$ es el espacio de funciones lisas (infinitas derivadas continuas) y periódicas de periodo 1.

Ejemplos:

1. $e^{2\pi i n x} \in C^\infty(\mathbb{T})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
2. $f(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z}) \in C^0(\mathbb{T})$, pero no a $C^1(\mathbb{T})$.
3. Finalmente, $y = (x)$ no pertenece a $C^0(\mathbb{T})$ ya que es discontinua en los enteros.

2.3. Espacios L^p .

En lo sucesivo supondremos conocida la medida de Lebesgue en la recta real \mathbb{R} (o en \mathbb{R}^n) y su restricción a un intervalo dado $[a, b]$.

Definición 3. Dado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

1. Diremos que $f \in L^p[a, b]$, $1 \leq p \leq \infty$, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una función medible que verifica:

$$\|f\|_{L^p[a, b]} = \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} < \infty,$$

donde dx designa a la medida de Lebesgue.

2. Diremos que $f \in L^\infty[a, b]$ si además de ser medible verifica que:

$$\|f\|_{L^\infty[a, b]} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \inf\{t \mid \text{medida de } \{x \mid |f(x)| > t\} = 0\} < \infty.$$

Cuando el intervalo $[a, b]$ esté fijado y no haya motivo de confusión, simplificaremos la notación y escribiremos:

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p[a, b]}.$$

La desigualdad numérica $(A + B)^p \leq 2^{p-1}(A^p + B^p)$ válida para $A, B \geq 0$, $p \geq 1$, cuya demostración proponemos como ejercicio, nos permite concluir que el espacio $L^p[a, b]$ es un espacio vectorial: es cerrado para la suma y para el producto por escalares. Sin embargo, L^p tiene una estructura mucho más rica que está estrechamente relacionada con dos de las desigualdades básicas de las matemáticas, a saber: la desigualdad de Hölder y la de Minkowski.

2.3.1. Desigualdad de Hölder.

Lema 1. *Dados dos números p, q tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p, q$ tenemos que:*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

para cada par de números no negativos A, B .

Demostración:

1. El caso $p = 1, q = \infty$ es trivial, consideremos pues los casos $p, q \neq \infty$.
- **Primera demostración:** Basada en el hecho de que la función $y = \log(t)$ es cóncava en $t \in (0, \infty)$, ya que $y''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$, luego:

$$\log\left(\frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \log(A^p) + \frac{1}{q} \log(B^q) = \log(AB)$$

- **Segunda demostración: (Desigualdad de Young):** Sea $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función estrictamente creciente que pasa por el origen ($\varphi(0) = 0$) y sea $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ función inversa. Tenemos que

$$AB \leq \int_0^A \varphi(x) dx + \int_0^B \Psi(y) dy$$

cualesquiera que sean los números positivos A, B .

Para verlo, observemos que hay dos posibilidades: $B \geq \varphi(A)$ ó $B < \varphi(A)$.

a) En el primer caso:

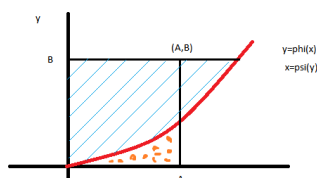


Figura 2.4.

$$AB \leq \text{área punteada} + \text{área rayada} = \int_0^A \varphi + \int_0^B \psi.$$

b) En el segundo caso:

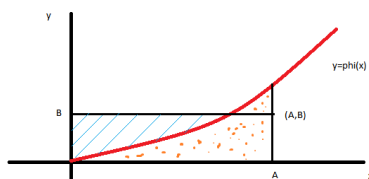


Figura 2.5.

Área rectángulo $(0, A, B, (A, B)) = AB \leq \text{área punteada} + \text{área rayada} =$

$$= \int_0^A \varphi + \int_0^B \psi$$

En particular, si tomamos $\varphi(x) = x^{p-1}$, $\psi(y) = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, obtenemos:

$$AB \leq \int_0^A x^{p-1} dx + \int_0^B y^{q-1} dy = \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

H.A.N.V.¹

¹He Aquí Nuestra Victoria.

Teorema 1. Desigualdad de Hölder. Dadas $f \in L^p$, $g \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $fg \in L^1$ y se verifica que

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q dx \right]^{1/q}.$$

Demostración: El caso $p = 1$, $q = \infty$ es especialmente sencillo y se deja como ejercicio al lector. Cuando $1 < p, q < \infty$ observemos que $\|f\|_p = 0$ (respectivamente $\|g\|_q = 0$) implica que $f(x) = 0$ en casi todo x y, por tanto, $f(x)g(x) = 0$ en casi todo x y la desigualdad resulta obvia ya que $\int_a^b |fg| = 0$.

Luego, podemos suponer, sin perder generalidad, que $\|f\|_p \neq 0$ y $\|g\|_q \neq 0$. A continuación observemos que la desigualdad de Hölder tiene una cierta homogeneidad: si se cumple para dos funciones f y g también se cumple para todos los pares λf y μg donde λ, μ son números arbitrarios. En particular, si tomamos $\lambda = \frac{1}{\|f\|_p}$ y $\mu = \frac{1}{\|g\|_q}$ obtenemos que $f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}$ y $g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$ verifican que $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$ y, por la observación anterior, la desigualdad de Hölder es equivalente a probar que

$$\int_a^b |f_1(x)g_1(x)|dx \leq 1.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_1(x)g_1(x)|dx &\leq \int_a^b \left(\frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \right) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \|f_1\|_p^p + \frac{1}{q} \|g_1\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

H.A.N.V.

Corolario 1.1.

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right|, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Demostración:

1.

$$\begin{aligned} \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| &\leq \sup_{\|g\|_q \leq 1} \int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \\ &\leq \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q dx \right]^{1/q} = \|f\|_p. \end{aligned}$$

2. En el otro sentido: definamos $g(x) = \frac{|f(x)|^{p-1} \text{sig}(f(x))}{\|f\|_p^{p-1}}$ (donde $\text{sig}(t) = 1$ si $t > 0$, -1 si $t < 0$ y 0 si $t = 0$). Tenemos que:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| = \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}} \int_a^b |f(x)|^p dx = \|f\|_p.$$

Mientras que:

$$\|g\|_q = \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}} \left[\int_a^b (|f(x)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} = \frac{\|f\|_p^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} = 1.$$

Luego

$$\|f\|_p \leq \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right|.$$

Ambas desigualdades demuestran el corolario.

H.A.N.V.

2.3.2. Desigualdad de Minkowski.

Teorema 2. Desigualdad de Minkowski. Dadas f y g en $L^p[a, b]$ resulta que

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración: Sea q el exponente conjugado de p , es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. El corolario anterior nos permite escribir:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p &= \sup_{\|h\|_q \leq 1} \left| \int_a^b (f(x) + g(x))h(x)dx \right| \leq \\ &\leq \sup_{\|h\|_q \leq 1} \left| \int_a^b f(x)h(x)dx \right| + \sup_{\|h\|_q \leq 1} \left| \int_a^b g(x)h(x)dx \right| = \|f\|_p + \|g\|_p. \end{aligned}$$

H.A.N.V.

Observemos que $\|f + g\|_p = \|g + f\|_p$, $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ para todo número complejo λ . La desigualdad de Minkowski es la "desigualdad triangular" para nuestro calibre $\|f\|_p$. Sin embargo $\|f\|_p = 0$ sólo implica que f sea 0 en casi todo punto, pero no necesariamente en todo punto. Esta propiedad es la que impide que $\|\cdot\|_p$ sea una norma en el espacio L^p tal como lo hemos definido y esto es un incordio. Hay una manera de salvar la situación que consiste en definir el espacio $L^p[a, b]$ no como un espacio de funciones, sino como clases de equivalencia de funciones bajo la relación $f \equiv g$ si $f(x) = g(x)$ para casi todo $x \in [a, b]$. Es decir, $L^p[a, b] = L^p[a, b]/\equiv$. Sin embargo, en lo sucesivo, nosotros consideraremos siempre funciones en L^p , aunque en puridad habría que hablar de clases de equivalencia de ellas. La desigualdad de Minkowski es la desigualdad del triángulo para la norma $\|\cdot\|_p$.

Una sencilla iteración de la desigualdad de Minkowski nos da que $\|f_1 + \dots + f_n\|_p \leq \|f_1\|_p + \dots + \|f_n\|_p$ cualesquiera que sean las funciones f_i del espacio L^p . Lo que a su vez podemos extender a sumas infinitas, etc. A continuación vamos a obtener una generalización que es especialmente útil:

Teorema 3. Desigualdad integral de Minkowski. Sea $f(x, t)$ una función medible en el rectángulo $a \leq x \leq b$, $c \leq t \leq d$ y sea $p \geq 1$. Tenemos que:

$$\left[\int_a^b \left| \int_c^d f(x, t) dt \right|^p dx \right]^{1/p} \leq \int_c^d \left[\int_a^b |f(x, t)|^p dx \right]^{1/p} dt.$$

Demostración: Tenemos que

$$\int_a^b \left| \int_c^d f(x, t) dt \right|^p dx \leq \int_a^b \left(\int_c^d |f(x, t)| dt \right)^p dx$$

luego no hay pérdida de generalidad si suponemos que $f(x, t) \geq 0$. Como el caso $f \equiv 0$ (en casi todo punto) es obvio, podemos también asumir que

$$I = \left[\int_a^b \left(\int_c^d |f(x, t)| dt \right)^p \right]^{1/p} > 0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I^p &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right)^p dx = \\ &= \int_a^b \left[\left(\int_c^d f(x, t) dt \right)^{p-1} \cdot \int_c^d f(x, s) ds \right] dx = \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right)^{p-1} f(x, s) dx \right] ds \end{aligned}$$

por Tonelli (hemos intercambiado el orden de la integración en x y en t).

Estamos en condiciones de aplicar la desigualdad de Hölder $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q = \frac{p}{p-1}$ al último miembro de la igualdad anterior; obtenemos:

$$\begin{aligned} I^p &\leq \int_c^d \left[\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right)^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_a^b f(x, s)^p dx \right)^{1/p} ds = \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right)^p dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_a^b f(x, s)^p dx \right)^{1/p} ds = \\ &= \left[\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right)^p dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \cdot \int_c^d \left(\int_a^b f(x, s)^p dx \right)^{1/p} ds = \\ &= I^{p-1} \cdot \int_c^d \left(\int_a^b f(x, s)^p dx \right)^{1/p} ds \end{aligned}$$

Para concluir basta con dividir en ambos miembros por I^{p-1} (que hemos supuesto distinto de 0).

H.A.N.V.

Sean $1 \leq p_1 < p_2$ y f una función del espacio $L^{p_2}[a, b]$, la desigualdad de Hölder aplicada a las funciones $|f(x)|^{p_1}$ y $g(x) = 1$ con los exponentes $p = \frac{p_2}{p_1}$, $q = \frac{p_2}{p_2 - p_1}$ nos da:

$$\int_a^b |f(x)|^{p_1} dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^{p_2} dx \right]^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot \left[\int_a^b dx \right]^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}}$$

Luego

$$\|f\|_{L^{p_1}[a, b]} \leq (b - a)^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2}} \|f\|_{L^{p_2}[a, b]}$$

En particular, hemos obtenido las inclusiones $L^{p_1} \supset L^{p_2}$ siempre que $p_1 \leq p_2$ y en el caso $b - a = 1$ tenemos la desigualdad de normas $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2}$.

Ejercicio:

1. Demostrar que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
2. Probar que si $p_1 < p_2$ entonces $L^{p_2} \subsetneq L^{p_1}$, es decir, existe una función $f \in L^{p_1}$ y $f \notin L^{p_2}$.
3. Observar que la función $f(x) = |\log(x)|$, $0 \leq x \leq 1$ pertenece a $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ pero no a $L^\infty[0, 1]$.

Como hemos indicado antes, la norma $\|\cdot\|_p$ induce la distancia $d_p(f, g) = \|f - g\|_p$, luego L^p es un espacio métrico. Una propiedad importante que poseen estos espacios L^p es la de ser completos.

Proposición 1. *El espacio $L^p[a, b]$, $1 \leq p \leq \infty$ es un espacio métrico completo.*

Demostración: Hemos de probar que toda sucesión de Cauchy es convergente. Supongamos pues que $\{f_n\}_{n=1,2,\dots} \subset L^p[a, b]$ es una sucesión de Cauchy (para todo $\epsilon > 0$, existe $n = n(\epsilon)$ tal que si $r, s \geq n(\epsilon)$ se verifica que $d_p(f_r, f_s) = \|f_r - f_s\|_p < \epsilon$) tenemos que encontrar su límite f en el espacio L^p .

Si tuviésemos tanta suerte que la sucesión f_n convergiera en casi todo punto x a un límite $f(x)$; este sería el candidato natural.

Ahora bien, eso sería demasiada suerte ya que, en general, la convergencia en L^p no implica, ¡ni mucho menos!, la convergencia puntual. Luego, ¡estamos perdidos! Bueno, quizás no, ya que si la sucesión $\{f_n\}$ no converge en casi todo punto a lo mejor podemos encontrar una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que sí lo haga y eso nos bastaría para poder definir $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$ como candidato natural al límite buscado.

¿Cómo encontrar esa subsucesión estupenda?

Recordemos que la definición de sucesión de Cauchy dice que $d_p(f_n, f_m) \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$, pero no especifica nada acerca de la rapidez de dicha

convergencia. Parece razonable esperar que cuanto más rápidamente vayan a 0 esas distancias, mayor probabilidad tenemos de que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converja puntualmente.

Sirvan las anteriores consideraciones heurísticas para justificar la siguiente construcción:

1. Por inducción definimos la subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de manera que $d_p(f_{n_k}, f_m) < 2^{-k}$ si $m \geq n_k$.
2. Comprobamos que existe $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$, para casi todo $x \in [a, b]$.

Observemos que:

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \cdots + (f_{n_k} - f_{n_{k-1}})$$

Es decir, la convergencia de la sucesión $\{f_{n_k}(x)\}$ es equivalente a la de la serie cuyo término general es $f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)$. El criterio de comparación nos deduce la convergencia de esta serie de términos positivos.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)|$$

Tenemos que:

$$\left[\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}| \right)^p dx \right]^{1/p} \leq \|f_{n_1}\|_p + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = 1 + \|f_{n_1}\|_p$$

El teorema de la convergencia monótona implica que:

$$\int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}| \right)^p dx < \infty$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^k f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \right| < \infty$$

en casi todo $x \in [a, b]$ y, por tanto, existe $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$ en casi todo x .

Observamos además que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - f_{n_k}(x)|^p dx &\leq \int_a^b \left(\sum_{j \geq k+1} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)| \right)^p dx \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{2^k} \right)^p \rightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Luego, la subsucesión $\{f_{n_k}\}$ converge a f de ambas maneras: en $L^p[a, b]$ y en casi todo punto.

3. Finalmente, la desigualdad triangular $\|f - f_n\|_p \leq \|f - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p$, nos permite, de manera rutinaria, comprobar que toda la sucesión original $\{f_n\}$ converge a f en la métrica $L^p[a, b]$.

H.A.N.V.

Observación: Si f es una función periódica de periodo 1 e integrable ($f \in L^1(\mathbb{T})$), entonces todas las integrales

$$\int_a^{a+1} f(t)dt$$

coinciden. Es decir, no dependen de a .

Sea $a = [a] + (a)$. Es claro que:

$$\int_a^{a+1} f(t)dt = \int_{(a)}^{(a)+1} f(t+[a])dt = \int_{(a)}^{(a)+1} f(t)dt$$

puesto que $f(t+[a]) = f(t)$ por periodicidad. Por otro lado:

$$\begin{aligned} \int_{(a)}^{(a)+1} f(t)dt &= \int_{(a)}^1 f(t)dt + \int_1^{1+(a)} f(t)dt = \\ &= \int_{(a)}^1 f(t)dt + \int_0^{(a)} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt. \end{aligned}$$

2.4. Convolución.

Dadas dos funciones periódicas (de periodo 1) e integrables $f, g \in L^1[a, b]$ podemos definir:

Definición 4.

$$f * g = \int_0^1 f(x-t)g(t)dt, \text{ en casi todo punto } x.$$

El teorema de Tonelli aplicado a la integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_0^1 |f(x-t)||g(t)|dt \right] dx &= \\ &= \int_0^1 |g(t)| \left[\int_0^1 |f(x-t)|dx \right] dt = \\ &= \|g\|_{L^1[0,1]} \cdot \|f\|_{L^1[0,1]} < \infty \end{aligned}$$

implica que la integral $\int_0^1 |f(x-t)||g(t)|dt$ existe en casi todo x y la función resultante también está en $L^1[0, 1]$. En particular, $f * g(x)$ existe en casi todo punto x y verifica la estimación:

$$\|f * g\|_{L^1[0,1]} \leq \|f\|_{L^1[0,1]} \cdot \|g\|_{L^1[0,1]}$$

Definición 5. La función antes definida $f * g$ se denomina **convolución** de f y g y goza de las siguientes propiedades:

1. Conmutativa: $f * g = g * f$.
2. Asociativa: $f * (g * h) = (f * g) * h$.
3. $f * g$ es también una función periódica de periodo 1.
4. Si $f \in C^k(\mathbb{T})$ y $g \in L^1$ entonces $f * g \in C^k(\mathbb{T})$ y se verifica que:

$$D^j(f * g) = D^j f * g, \quad 0 \leq j \leq k.$$

5. Si $f \in L^1[0, 1]$ y $g \in L^p[0, 1]$, son funciones periódicas de periodo 1, entonces

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p.$$

Las tres primeras propiedades son muy sencillas de demostrar y quedan como ejercicio. Observemos que la propiedad 4. puede interpretarse afirmando que la convolución hereda las mejores propiedades de diferenciabilidad de sus componentes: no importa lo discontinua que puede ser g (ó f) que $f * g$ es tantas veces diferenciable como lo sea f (ó g).

Demostración: Del apartado 4.

1. **Caso** $C^0(\mathbb{T})$. Sea $f \in C^0(\mathbb{T})$ y $g \in L^1 \Rightarrow$

$$f * g(x) - f * g(y) = \int_0^1 [f(x-t) - f(y-t)]g(t)dt$$

Por ser f continua y periódica es uniformemente continua (ejercicio) luego:

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|z - w| < \delta$ implica que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$, por tanto:

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(y)| &\leq \int_0^1 |f(x-t) - f(y-t)| |g(t)| dt \leq \\ &\leq \epsilon \|g\|_1 \text{ si } |x - y| < \delta. \end{aligned}$$

2. **Caso** $f \in C^1(\mathbb{T})$. Tenemos que dado $h \neq 0$.

$$\frac{f * g(x+h) - f * g(x)}{h} = \int_0^1 \frac{f(x-t+h) - f(x-t)}{h} g(t) dt$$

Observemos que el teorema del valor medio del cálculo diferencial nos da:

$$\left| \frac{f(x-t+h) - f(x-t)}{h} \right| = |f'(x-t+s)| \leq \sup_y |f'(y)| < \infty$$

Luego, quienquiera que sea $h \neq 0$ resulta que:

$$\left| \frac{f(x-t+h) - f(x-t)}{h} \right| |g(t)| \leq \sup |f'| |g(t)| \in L^1$$

Estamos pues en condiciones de aplicar el teorema de la convergencia dominada para concluir que:

$$\begin{aligned} (f * g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f * g(x+h) - f * g(x)}{h} = \\ &= \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-t+h) - f(x-t)}{h} g(t) dt = \\ &= \int_0^1 f'(x-t) g(t) dt = f' * g \end{aligned}$$

3. El caso general se obtiene iterando los dos anteriores.

H.A.N.V.

Demostración: Del apartado 5.

Usando la desigualdad integral:

$$\begin{aligned} \left[\int_0^1 |f * g(x)|^p dx \right]^{1/p} &\leq \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 |f(x-t)| |g(t)| dt \right]^p dx \right]^{1/p} \leq \\ &\leq \int_0^1 \left[\int_0^1 |f(x-t)|^p |g(t)|^p dx \right]^{1/p} dt = \\ &= \int_0^1 |g(t)| \left[\int_0^1 |f(x-t)|^p dx \right]^{1/p} dt = \\ &= \int_0^1 |g(t)| \left[\int_0^1 |f(x)|^p dx \right]^{1/p} dt = \|g\|_1 \cdot \|f\|_p. \end{aligned}$$

H.A.N.V.

2.5. Módulo de continuidad.

De manera implícita en la definición de convolución hemos usado las traslaciones de la recta real. Dado $y \in \mathbb{R}$ podemos considerar el operador δ y que actúa sobre las funciones por medio de la fórmula:

$$\delta_y f(x) = f(x-y)$$

Es decir, la gráfica de $\delta_y f$ se obtiene trasladando la de f en la cantidad y .

Si $f \in C^0(\mathbb{T})$ es continua y periódica y, por tanto, uniformemente continua en la recta real, tenemos que las diferencias $|f(x) - \delta_y f(x)|$ las podemos hacer tan pequeñas como queremos, uniformemente en x , sin más que tomar y suficientemente pequeño. Es decir; sea

$$\omega(\gamma) = \omega(f)(\gamma) = \sup_{0 \leq y \leq \gamma} (\sup_x |f(x) - \delta_y f(x)|)$$

la función creciente $\omega(\gamma)$ verifica que $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \omega(\gamma) = 0$ y, por razones obvias, se denominan el módulo de continuidad de la función continua $f \in C^0(\mathbb{T})$.

Ejercicio: Estimar los módulos de continuidad de las siguientes funciones:

1. $\text{sen}(2\pi nx)$, $\text{cos}(2\pi nx)$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $(\text{dist}(x, z))^\alpha$, $\alpha > 0$.

En el caso de las funciones de L^p ($1 \leq p < \infty$) la definición anterior no tiene sentido en general. Sin embargo, hay una variación denominada **módulo de continuidad integral** que es útil de manejar:

Definición 6. Dada $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$,

$$\omega_p(\gamma) = \sup_{0 \leq y \leq \gamma} \|\delta_y f - f\|_p.$$

Es claro que $\omega_p(\gamma)$ es una función creciente de γ y acotada: $\omega_p(\gamma) \leq 2\|f\|_p$. El hecho interesante es el siguiente:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \omega_p(\gamma) = 0.$$

Demostración:

1. Caso 1. Sea $f = \chi_{[a,b]}$ la función indicadora de un intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$.

$$\chi_{[a,b]} = 1, \quad a \leq x \leq b$$

$$\chi_{[a,b]} = 0, \quad x \in [0, 1] - [a, b]$$

Es claro que

$$\|\delta_y \chi_{[a,b]} - \chi_{[a,b]}\|_p \leq (2y)^{1/p}$$

y, por tanto:

$$\omega_p(\gamma) \leq (2\gamma)^{1/p} \rightarrow 0, \quad \text{si } \gamma \rightarrow 0.$$

2. Caso 2. Sea $f = \chi_E$, $E \subset [0, 1]$ conjunto medible. Observemos que dado $\eta > 0$ podemos encontrar una familia finita y disjunta de intervalos $I_1 = [a_1, b_1)$, $I_2 = [a_2, b_2)$, ..., $I_N = [a_N, b_N)$ tales que:

$$\mu(\{\bigcup I_j - E\}) < \eta, \quad E \subset \bigcup I_j$$

donde μ es la medida de Lebesgue.

Entonces:

$$\begin{aligned} \|\delta_y \chi_E - \chi_E\|_p &\leq \|\delta_y \chi_E - \delta_y \chi_{\cup T_j}\|_p + \\ &+ \|\delta_y \chi_{\cup I_j} - \chi_{\cup I_j}\|_p + \|\chi_{\cup I_j} - \chi_E\|_p \leq \\ &\leq 2\eta^{1/p} + \sum_j \|\delta_y \chi_{I_j} - \chi_{I_j}\|_p \leq 2\eta^{1/p} + N(2y)^{1/p} \end{aligned}$$

Luego, dado $\epsilon > 0$ escogemos primero η de manera que $2\eta^{1/p} < \epsilon/2$ y luego γ_0 de manera que $N(2\gamma_0)^{1/p} < \epsilon/2$ con lo que nos aseguramos que

$$\omega_p(\gamma) < \epsilon \text{ si } \delta \leq \delta_0$$

Luego

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \omega_p(\gamma) = 0$$

3. Caso 3. $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \omega_p(\gamma) = 0$ para funciones simples $s = \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{E_j}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, E_j medible (se deduce fácilmente del caso anterior).

Finalmente, la definición de integral de Lebesgue nos dice que dada $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$ existe una sucesión de funciones simples s_n tales que $\|f - s_n\|_p \rightarrow 0$ y esto nos permite acabar la demostración por un argumento rutinario de aproximación.

H.A.N.V.

¡Ojo! Obsérvese que hemos considerado módulos de continuidad en L^p pero no en L^∞ . La razón es la siguiente: sea $f = \chi_{[a,b]}$ entonces $\|\delta_y f - f\|_\infty = 1$, $\forall y \neq 0$. El espacio L^∞ no es adecuado para esta noción y debe ser sustituido por $C^0(\mathbb{T})$ donde sí tiene sentido.

Regularización. A continuación vamos a explotar las propiedades que hemos analizado del producto de convolución para regularizar funciones de las clases L^p y aproximarlas por otras que son diferenciables.

Definición 7. Dada una función medible f diremos que el punto x **no pertenece a su soporte** si f se anula (en casi todo punto) en un entorno abierto del punto x . Esta definición implica, naturalmente, que el complementario del soporte es un abierto. En otras palabras: el soporte de la función f es el cerrado más pequeño fuera del cual se anula f en casi todo punto. Escribiremos $\text{sop}(f)$ para designar a ese cerrado.

Ejemplo (Una función notable):

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}, \text{ si } |x| < 1$$

$$\varphi(x) = 0, \text{ si } |x| \geq 1$$

Es claro que $\text{sop}(\varphi) = [-1, 1]$. Un sencillo cálculo nos da también que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$: φ es de clase C^∞ y tiene soporte compacto. Sea:

$$c = \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-x^2}} dx$$

Para todo $\epsilon > 0$ definimos:

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{c\epsilon} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

Tenemos que:

1. $\phi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi_\epsilon \geq 0$, $\text{sop}(\phi_\epsilon) = [-\epsilon, \epsilon]$.
2. $\int \phi_\epsilon(x) dx = 1$.

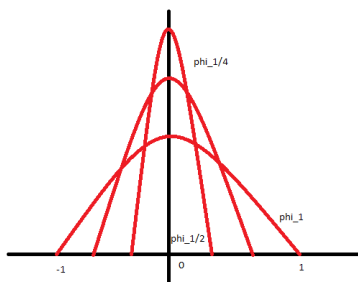


Figura 2.6. Gráfica de las funciones ϕ_ϵ

Es decir, hemos construido una familia de funciones no negativas, todas de masa 1, pero que se va concentrando en torno al origen. Esta situación interesante la encontraremos varias veces en este curso (núcleos de Fejer, de Poisson, del calor, etc) y la denominaremos con el nombre genérico de "aproximación de la identidad".

Con un $\epsilon > 0$ fijado podemos extender ϕ_ϵ como función periódica de periodo 1. Dado el papel especial desempeñado por el origen, resulta más cómodo formar como intervalo fundamental $I = [-1/2, 1/2]$ en ves de $[0, 1]$ ó cualquier otro. Sin embargo, esta elección no es, en absoluto, importante ya que obtendríamos la misma teoría en cualquier $[a, a + 1]$.

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ una función periódica de periodo 1, entonces

$$f_\epsilon(x) = \phi_\epsilon * f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \phi_\epsilon(x-t)f(t)dt$$

es una función periódica de periodo 1 y clase C^∞ . Tenemos que:

1. Si $f \in C^0(\mathbb{T})$ entonces f_ϵ converge uniformemente a f cuando ϵ tiende a 0.

2. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, entonces f_ϵ converge a f en L^p cuando ϵ tiende a 0:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f_\epsilon - f\|_p = 0.$$

En otras palabras: toda función continua y periódica puede aproximarse uniformemente por funciones de clase C^∞ . Toda función de L^p , $1 \leq p < \infty$, puede aproximarse en esa métrica por funciones C^∞ . El espacio $C^\infty(\mathbb{T})$ es denso en todos los $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, y en $C^0(\mathbb{T})$.

Demostración:

a)

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon * f(x) - f(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t)\phi_\epsilon(t)dt - f(x) \int_{-1/2}^{1/2} \phi_\epsilon(t)dt = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} [f(x-t) - f(x)]\phi_\epsilon(t)dt = \\ &= \int_{|t| \leq \epsilon} [f(x-t) - f(x)]\phi_\epsilon(t)dt \end{aligned}$$

Luego:

$$|\phi_\epsilon * f(x) - f(x)| \leq \int_{|t| \leq \epsilon} \omega(\epsilon)\phi_\epsilon(t)dt \leq \omega(\epsilon)$$

lo que produce la convergencia uniforme ya que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega(\epsilon) = 0$.

b)

$$\begin{aligned} &\left(\int_{-1/2}^{1/2} |\phi_\epsilon * f(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left[\int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{-1/2}^{1/2} |f(x-t) - f(x)|\phi_\epsilon(t)dt \right)^p dx \right]^{1/p} \leq \\ &\leq \int_{-1/2}^{1/2} \left[\int_{-1/2}^{1/2} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right]^{1/p} dt \leq \\ &\leq \int_{-1/2}^{1/2} \omega_p(\epsilon)\phi_\epsilon(t)dt = \omega_p(\epsilon) \end{aligned}$$

H.A.N.V.

Capítulo 3

El Teorema Fundamental del Cálculo.

3.1. Lema de recubrimiento de Vitali.

Lema 2. Dada una familia finita $\{B_i\}_{i \in J}$ de bolas del espacio euclídeo \mathbb{R}^n , podemos seleccionar una subfamilia $\{B_1, \dots, B_N\}$ con las siguientes propiedades:

1. $B_j \cap B_k = \emptyset$, $j \neq k$.
2. $\cup_{i \in I} B_i \subset \cup_{j=1}^N B_j^*$, donde $B^*(x; r) = B(x; 3r)$.

Demostración: Escogamos B_1 con la propiedad de tener radio máximo entre las $\{B_i\}$. Suponiendo que hemos elegido B_1, \dots, B_k la siguiente B_{k+1} la elegimos entre las de radio máximo que son disjuntas con las anteriores B_1, \dots, B_k .

La propiedad $B_j \cap B_k = \emptyset$ si $j \neq k$ es inmediata. En cuanto a la otra, dada una bola B_i ora es una de las elegidas o ya tiene una intersección no vacía en una de las B_k tal que $\text{diam}(B_k) \geq \text{diam}(B_i)$, en cuyo caso $B_i \subset B_k^*$.

H.A.N.V.

3.2. Función Maximal de Hardy-Littlewood.

Definición 8. Dada $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{B} = \{\text{Bolas de } \mathbb{R}^n\}$, la **función maximal de Hardy-Littlewood** está definida por la fórmula:

$$Mf(x) = \sup_{x \in B, B \in \mathcal{B}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y)$$

Tenemos unas propiedades inmediatas:

- $M(\lambda f) = |\lambda| Mf$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- $M(f + g) \leq Mf(x) + Mg(x)$.

Teorema 4. Maximal de Hardy-Littlewood. $\forall \alpha > 0$,

$$\mu\{x : Mf(x) \geq \alpha > 0\} \leq C_n \frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

(donde C_n es una constante finita que depende sólo de la dimensión n).

Demostración: Dado $y \in E_\alpha = \{Mf(x) \geq \alpha > 0\}$, existe una bola $B(y, r(y))$ tal que

$$\frac{1}{\mu(B(y, r(y)))} \int_{B(y, r(y))} |f(z)| d\mu(z) \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Sea K un compacto contenido en E_α ; por lo anterior

$$K \subset \bigcup_{y \in K} B(y, r(y))$$

y por compacidad podemos encontrar un subrecubrimiento finito $\{B(y_i, r_i)\}$. El lema de Vitali nos da la subfamilia disjunta B_1, \dots, B_N , donde $\forall j$

$$\frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{\mu(B_j)} \int_{B_j} |f(x)| dx.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mu(K) &\leq \mu\left(\bigcup_j B_j^*\right) \leq \sum_j \mu(B_j^*) \leq \\ &\leq 3^n \sum_j \mu(B_j) \leq 3^n \frac{2}{\alpha} \sum_j \int_{B_j} |f| \leq \\ &\leq \frac{2 \cdot 3^n}{\alpha} \int_{\cup B_j} |f| \leq 2 \cdot 3^n \frac{\|f\|_1}{\alpha} \end{aligned}$$

Finalmente, observamos que

$$\mu(E_\alpha) = \sup_{K \text{ compacto, } K \subset E_\alpha} \mu(K).$$

H.A.N.V.

3.3. Teorema de Diferenciación (Lebesgue).

Notación: $B_k \Rightarrow x$ significa que la sucesión de bolas B_k contienen todas al punto x y sus radios tienden a 0: $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(B_k) = 0$.

Teorema 5. Dada una función $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ se verifica que

$$\lim_{B_k \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_k} f(y) d\mu(y) = f(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: La demostración se basa en los siguientes hechos:

1. Basta probar el teorema para funciones integrables ($f \in L^1(\mathbb{R}^n)$), dada la naturaleza "local" del enunciado.
2. La conclusión es cierta para todo $x \in \mathbb{R}^n$ si la función f es continua.
3. Las funciones continuas son densas en el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Bastará probar que:

$$\begin{aligned} & \mu\left\{x : \left| \limsup_{B_k \ni x} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_k} f(y) d\mu(y) - f(x) \right| > 0\right\} = \\ & = \mu\left\{x : \left| \liminf_{B_k \ni x} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_k} f(y) d\mu(y) - f(x) \right| > 0\right\} = 0 \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} & \left\{x : \left| \limsup_{B_k \ni x} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_k} f - f(x) \right| \neq 0\right\} = \\ & \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : \left| \limsup_{B_k \ni x} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_k} f - f(x) \right| > \frac{1}{n}\right\} = \bigcup E_n. \end{aligned}$$

Por lo que es suficiente demostrar que $\mu(E_n) = 0$, $\forall n$. Dado $\delta > 0$ y una función continua g :

$$\begin{aligned} & \left\{x : \left| \limsup_{B_k \ni x} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_k} f - f(x) \right| > \delta\right\} = \\ & = \left\{x : \left| \limsup_{B_k \ni x} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_k} (f(y) - g(y)) d\mu(y) - (f(x) - g(x)) \right| > \delta\right\} \subset \\ & \subset \left\{x : \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y) - g(y)| d\mu(y) \geq \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{x : |f(x) - g(x)| > \frac{\delta}{2}\right\} \end{aligned}$$

Por el teorema maximal y la desigualdad de Chebychev, tenemos que:

$$\begin{aligned} & \mu\left\{x : \left| \limsup_{B_k \ni x} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_k} f - f(x) \right| > \delta\right\} \leq \\ & \leq C_n \frac{\|f - g\|_1}{\delta/2} + \frac{\|f - g\|_1}{\delta/2} = \frac{2(C_n + 1)}{\delta} \|f - g\|_1 \end{aligned}$$

Pero la función continua g está a nuestra disposición y podemos elegirla de manera que $\|f - g\|_1$ sea tan pequeña como queramos y eso nos permite concluir la demostración.

El conjunto

$$\left\{x : \left| \liminf_{B_k \ni x} \frac{1}{\mu(B_k)} \int_{B_k} f - f(x) \right| = 0 \right\}$$

se estima de la misma manera.

H.A.N.V.

Teorema 6. *La función maximal está acotada en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración: El caso L^∞ es obvio ya que

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y) \leq \|f\|_{L^\infty}$$

Luego

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

Sea $1 < p < \infty$, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p d\mu(x) = p \int_0^\infty \lambda_{Mf}(\alpha) \alpha^{p-1} d\alpha$$

Donde

$$\lambda_{Mf}(\alpha) = \mu\{x : Mf(x) \geq \alpha > 0\}$$

Dado $\alpha > 0$ definimos:

$$f_1(x) = |f(x)|, \quad |f(x)| > \frac{\alpha}{2}$$

$$f_2(x) = 0, \quad \text{en otro caso}$$

$$f_2(x) = |f(x)|, \quad |f(x)| \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$f_2(x) = 0, \quad \text{en otro caso}$$

Sabemos que $Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x)$. Luego:

$$\{x : Mf(x) > \alpha\} \subset \{Mf_1(x) > \alpha/2\} \cup \{Mf_2(x) > \alpha/2\} = \{Mf_1(x) > \alpha/2\}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p d\mu(x) &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_{Mf}(\alpha) d\alpha \leq \\
 &\leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_{Mf_1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha \leq \\
 &\leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \left(\frac{C_n}{\alpha/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)| d\mu(x)\right) d\alpha = \\
 &= 2pC_n \int_0^\infty \alpha^{p-2} \left(\int_{\{|f(x)| > \alpha/2\}} |f(x)| d\mu(x)\right) d\alpha = \\
 &= 2pC_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} d\alpha\right) d\mu(x) = \\
 &= \frac{2^p p C_n}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu(x)
 \end{aligned}$$

H.A.N.V.

3.4. Teorema de interpolación (Marcinkiewicz):

Supongamos que tenemos un operador sublineal, es decir tal que:

1. $|T(\lambda f)| = |\lambda| |Tf|$, para toda función medible f y todo número complejo λ .
2. $|T(f+g)(x)| \leq C(|Tf(x)| + |Tg(x)|)$, donde $C < \infty$ y f, g son funciones medibles cualesquiera.

Ejemplos:

1. $Tf(x)$ = función maximal de Hardy-Littlewood.
2. $Tf(x) = 10f(x)$.
3. $Tf(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi(x-y)^2} f(y) dy$.

Teorema 7. Interpolación de Marcinkiewicz.

- Hipótesis: T es de tipo débil (p_1, p_1) y (p_2, p_2) con $p_1 < p_2$, si existen constantes c_1, c_2 tales que

$$\begin{aligned}
 \mu\{|Tf(x)| \geq \alpha > 0\} &\leq c_1 \frac{\|f\|_{p_1}^{p_1}}{\alpha^{p_1}} \\
 \mu\{|Tg(x)| \geq \alpha > 0\} &\leq c_2 \frac{\|g\|_{p_2}^{p_2}}{\alpha^{p_2}}
 \end{aligned}$$

para todo $\alpha > 0$ y cualquier función $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$.

- **Tesis:** T está acotado (es de tipo fuerte) en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p_1 < p < p_2$.

Demostración: Consideremos la función de distribución $\lambda_{Tf}(\alpha) = \mu\{|Tf(x)| > \alpha\}$, donde $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y observemos que, fijado α , se verifica la inclusión:

$$\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \subset \{x : |Tf_1(x)| > \alpha/2C\} \cup \{x : |Tf_2(x)| > \alpha/2C\}$$

donde

$$f_1(x) = f(x), |f(x)| > \alpha$$

$$f_1(x) = 0, \text{ en otro caso}$$

$$f_2(x) = f(x), |f(x)| \leq \alpha$$

$$f_2(x) = 0, \text{ en otro caso}$$

Claramente $f = f_1 + f_2$, por lo que $|Tf(x)| \leq C(|Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|)$ de lo que se deduce la inclusión anunciada.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_{Tf}(\alpha) d\alpha \leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_{Tf_1}\left(\frac{\alpha}{2C}\right) d\alpha + \\ &+ p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_{Tf_2}\left(\frac{\alpha}{2C}\right) d\alpha = I + II. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &\leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \left(c_1 \frac{1}{(\alpha/2C)^{p_1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1|^{p_1} dx \right) d\alpha = \\ &= p c_1 (2C)^{p_1} \int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1} \left(\int_{\{|f(x)| > \alpha\}} |f(x)|^{p_1} dx \right) d\alpha = \\ &= p c_1 (2C)^{p_1} \int |f(x)|^{p_1} \left(\int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-p_1-1} d\alpha \right) = \frac{p c_1 (2C)^{p_1}}{p-p_1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \end{aligned}$$

En cuanto a II , haciendo exactamente el mismo camino que en I , llegamos a la estimación:

$$II \leq \frac{p c_2 (2C)^{p_2}}{p_2-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$$

H.A.N.V.

Observación: La acotación que da el teorema de Marcinkiewicz es $\|Tf\|_p \leq c_p \|f\|_p$ donde

$$c_p^p \leq \frac{p c_1 (2C)^{p_1}}{p-p_1} + \frac{p c_2 (2C)^{p_2}}{p_2-p}.$$

Luego, c_p se dispara cuando $p \rightarrow p_1$ ó $p \rightarrow p_2$. Hay, no obstante, muchos casos interesantes en los que esta acotación puede ser mejorada, siempre que estemos en posesión de alguna información extra.

3.5. Convolución.

Recordemos que la convolución es:

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int g(x-y)f(y)dy = g * f(x).$$

Ejercicio:

1. Demostrar que la convolución es asociativa.
2. Demostrar que $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Sea $\phi(x)$ una función integrable, radial, no negativa y decreciente:

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0, \infty) \\ \phi(x) &= \phi(\|x\|)\end{aligned}$$

Consideremos, para todo $\varepsilon > 0$

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Ejercicio: Sea $\phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$, dibujar la gráfica de $\phi_\varepsilon(x)$ para $\varepsilon = 1, \frac{1}{10}, 10, \dots$

Ejercicio: Dado $\delta > 0$ demostrar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \delta} \phi_\varepsilon(x) dx = 0$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\phi(x) &\leq \phi(0)\chi_{B(0;1)}(x) + \phi(1)\chi_{B(0;2)}(x) + \dots + \phi(2^k)\chi_{B(0;2^k)}(x) + \dots = \\ &= \phi(0)\chi_{B_1}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \phi(2^n)\chi_{B_{2^n}}(x)\end{aligned}$$

Por lo que dada una función integrable f tenemos la estimación:

$$\begin{aligned}f_\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon * f(x) &= \varepsilon^{-n} \int \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy = \varepsilon^{-n} \int f(x-y) \phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy \leq \\ &\leq \varepsilon^{-n} \phi(0) \int_{B_\varepsilon(0)} f(x-y) dy + \sum_k \varepsilon^{-n} \phi(2^k) \int_{B_{2^k \varepsilon}(0)} f(x-y) dy \leq \\ &\leq \phi(0) \mu(B_1) \frac{1}{\mu(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon(0)} f(x-y) dy + \\ &+ \sum \phi(2^k) 2^{kn} \mu(B_1) \frac{1}{\mu(B_{2^k \varepsilon}(0))} \int_{B_{2^k \varepsilon}(0)} f(x-y) dy \leq \\ &\leq \left(\phi(0) \mu(B_1) + \sum \phi(2^k) 2^{kn} \mu(B_1) \right) M f(x) \leq C \cdot M f(x)\end{aligned}$$

Donde $Mf(x)$ designa a la función maximal de Hardy-Littlewood y $C < \infty$ por ser la función ϕ integrable:

$$\begin{aligned} \int |\phi(x)| dx &= \int_{|x| \leq 1} \phi(x) dx + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^n \leq |x| < 2^{n+1}} \phi(x) dx \geq \\ &\geq \phi(1)\mu(B_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi(2^n)\mu(B_{2^n}) \end{aligned}$$

En consecuencia, consideremos ahora una función ψ continua, integrable y no negativa tal que exista una mayorante radial decreciente ϕ :

$$\psi(x) \leq \phi(x)$$

Supongamos además que $\int \psi(x) dx = 1$ y formemos la familia:

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Por lo visto anteriormente tenemos que

$$\sup_{\varepsilon > 0} |\psi_\varepsilon * f(x)| \leq \sup_{\varepsilon > 0} |\phi_\varepsilon * f(x)| \leq C \cdot Mf(x)$$

Definición 9. Diremos que la familia $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ con las propiedades anteriores es una aproximación de la identidad.

Teorema 8. Dada una función continua $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, las funciones $g_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon * g(x)$ son también continuas y convergen puntualmente, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, al valor de g y uniformemente sobre conjuntos compactos.

Demostración:

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) - g(x) &= \int \psi_\varepsilon(x-y)g(y)dy - g(x) = \\ &= \int g(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy - g(x) \int \psi_\varepsilon(y)dy = \\ &= \int (g(x-y) - g(x))\psi_\varepsilon(y)dy = \\ &= \int_{|y| \leq \delta} (g(x-y) - g(x))\psi_\varepsilon(y)dy + \int_{|y| > \delta} (g(x-y) - g(x))\psi_\varepsilon(y)dy = \\ &= I + II \end{aligned}$$

Observamos que, dado η :

$$|I| \leq \max_{|y| \leq \delta} |g(x-y) - g(x)| \int_{|y| \leq \delta} \psi_\varepsilon(y)dy \leq \max_{|y| \leq \delta} |g(x-y) - g(x)| \leq \frac{\eta}{2}$$

si $\delta = \delta(\eta)$ es suficientemente pequeño.

Por otro lado:

$$\begin{aligned} |II| &\leq 2 \cdot \max_y |g(y)| \cdot \int_{|y| \geq \delta} \psi_\varepsilon(y) dy = \\ &= 2 \cdot \|g\|_\infty \int_{|y| \geq \delta} \psi_\varepsilon(y) dy \end{aligned}$$

pero como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \delta} \psi_\varepsilon(y) dy = 0$, tomando ε suficientemente pequeño, podemos concluir:

$$|II| \leq 2 \|g\|_\infty \int_{|y| \geq \delta} \psi_\varepsilon(y) dy \leq \frac{\eta}{2}$$

y, por tanto, $|I + II| \leq \eta$. Como es para cualquiera que sea $\eta > 0$, entonces,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La parte de la convergencia uniforme sobre compactos es un ejercicio sencillo.

H.A.N.V.

Para el caso de dimensión $n = 1$: supongamos además que ψ es simétrica respecto al origen, $\psi(-x) = \psi(x)$.

Sea f una función integrable, acotada, que tiene una discontinuidad de tipo salto en el punto x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f^-(x_0) \neq f^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Teorema 9.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x_0) = \frac{f^-(x_0) + f^+(x_0)}{2}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x_0) &= \int f(x_0 - y) \psi_\varepsilon(y) dy = \int_0^\infty f(x_0 - y) \psi_\varepsilon(y) dy + \\ &+ \int_{-\infty}^0 f(x_0 - y) \psi_\varepsilon(y) dy = \int_0^\infty f(x_0 - y) \psi_\varepsilon(y) dy + \int_0^\infty f(x_0 + y) \psi_\varepsilon(y) dy = \\ &= \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2} + \int_0^\infty (f(x_0 - y) - f^-(x_0)) \psi_\varepsilon(y) dy + \int_0^\infty (f(x_0 + y) - f^+(x_0)) \psi_\varepsilon(y) dy \end{aligned}$$

$$\text{ya que } \int_0^\infty \psi_\varepsilon(y) dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(y) dy = \frac{1}{2}.$$

La demostración se termina sin más que aplicar las definiciones de $f^+(x_0)$ y $f^-(x_0)$ con el mismo argumento del caso anterior.

H.A.N.V.

Por lo visto anteriormente tenemos la identidad:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \text{ y para toda } f \text{ continua y acotada.}$$

Además,

$\sup_{\varepsilon>0} |f_\varepsilon(x)| \leq C \cdot Mf(x)$, función maximal \implies

$$\mu\left(\left\{x : \sup_{\varepsilon>0} |f_\varepsilon(x)| > \alpha > 0\right\}\right) \leq C \frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

Estamos, pues, en las mismas condiciones del teorema de diferenciación de Lebesgue y podemos concluir:

Teorema 10. *Dada una aproximación de la identidad ψ_ε y dada $f \in \bigcup_{p=1}^{\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$, se verifica que:*

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon * f(x) = f(x) \text{ para casi todo punto } x.$$

Capítulo 4

Ejemplos de series de Fourier.

A toda función integrable y periódica de periodo unidad, $f \in L^1(\mathbb{T})$, le podemos asignar su serie de Fourier:

$$f \sim \sum \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

lo que significa que los coeficientes $\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ están dados por medio de las integrales:

$$\hat{f}(n) = \int_I f(t)e^{-2\pi int} dt$$

donde $I = [a, a + 1)$ es cualquier intervalo de longitud unidad.

Naturalmente las sumas parciales de la serie vienen definidas como

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{2\pi inx}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

desempeñan un papel fundamental en la teoría, cuya cuestión más perentoria consiste en decidir cuándo, y en qué sentido, podemos recuperar la función f a través de la sucesión $S_N f$.

Ejemplo 1.- Consideremos la función periódica definida por $f(x) = x$, $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$, cuya gráfica recuerda el perfil de una sierra dentada.

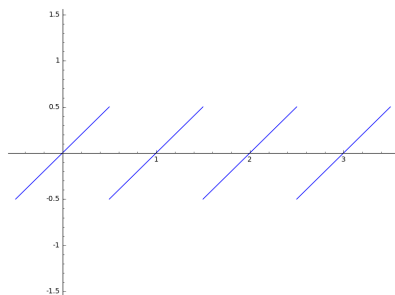


Figura 4.1.

Tenemos que: $\widehat{f}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} t \, dt = 0$

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \int_{-1/2}^{1/2} t \cdot e^{-2\pi i n t} \, dt = \frac{-1}{2\pi i n} \int_{-1/2}^{1/2} t \, de^{-2\pi i n t} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i n} \left(\frac{1}{2} e^{-\pi i n} + \frac{1}{2} e^{\pi i n} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} \end{aligned}$$

Luego para $N = 1, 2, 3, \dots$ obtenemos

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} \left(\frac{1}{n} e^{2\pi i n x} - \frac{1}{n} e^{-2\pi i n x} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(2\pi n x). \end{aligned}$$

(Es claro que $S_0 f(x) = \widehat{f}(0) = 0$)

Algunas gráficas que muestran como las sumas parciales se aproximan a la función (sumas parciales de 3 y 30 sumandos):

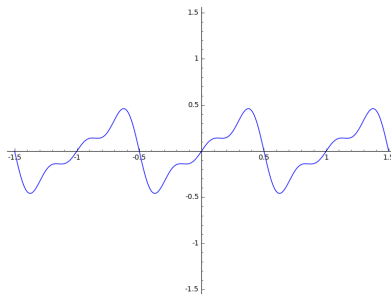


Figura 4.2.

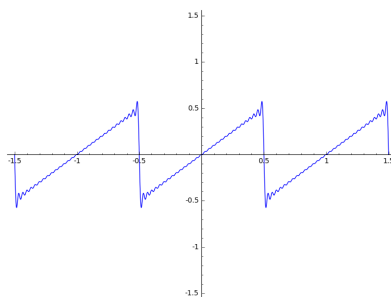


Figura 4.3.

Ejemplo 2.- Sea $f(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ la función periódica de periodo 1 que mide la distancia del punto x a los enteros, y cuya gráfica es la onda triangular:

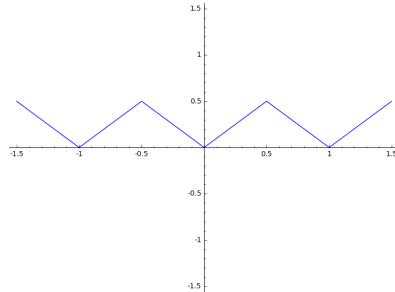


Figura 4.4.

Tenemos que

$$\hat{f}(0) = \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_0^{1/2} t \cdot e^{-2\pi i n t} dt + \int_{1/2}^1 (1-t) \cdot e^{-2\pi i n t} dt = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \text{ es par } k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ -\frac{1}{\pi^2(2k+1)^2} & \text{si } n = 2k+1 \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, obtenemos la serie

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{2\pi i(2k+1)x}$$

o bien:

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2\pi(2k+1)x)$$

Algunas gráficas que muestran como las sumas parciales se aproximan a la función (sumas parciales de 3 y 7 sumandos):

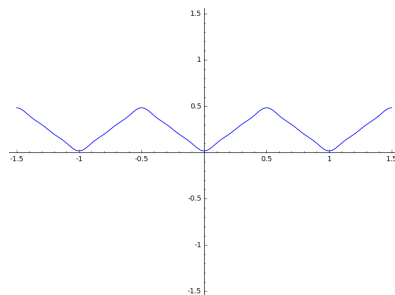


Figura 4.5.

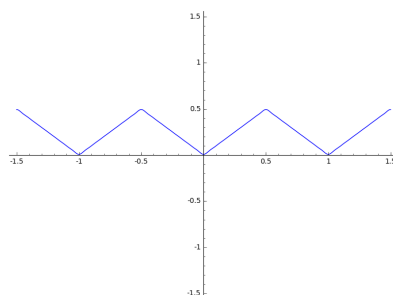


Figura 4.6.

Si hiciésemos con más detalle las representaciones gráficas de $S_N f$ para los dos ejemplos considerados, observaríamos que en este segundo la aproximación es mejor que en el primero. Es decir, tenemos que tomar menos términos del desarrollo para obtener una gráfica muy próxima a la de la función original. Este fenómeno es interesante de analizar y en futuros capítulos veremos como la lisura de la función $dist(x, \mathbb{Z})$, que es lipschitziana, juega a favor de la rapidez de la convergencia de su serie.

Ejemplo 3.- $y = (x)$ parte fraccionaria.

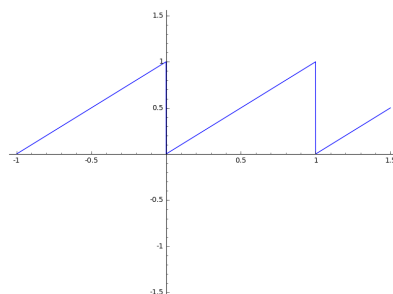


Figura 4.7.

Se trata, claro esta, de una serie muy similar al ejemplo 1:

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 t \cdot e^{-2\pi i n t} dt = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 0 \\ -\frac{1}{2\pi i n} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$$S_N f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i n} \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n} e^{2\pi i n x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\text{sen}(2\pi n x)}{n}$$

Que dan lugar a gráficas del tipo de la siguiente

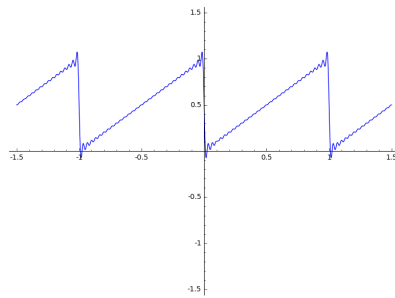


Figura 4.8.

Ejemplo 4.- Onda cuadrado: $f(x) = 1$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ y $f(x) = -1$ si $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

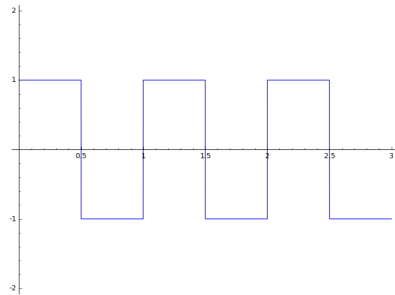


Figura 4.9.

Tenemos que $\hat{f}(0) = 0$ y que

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_0^{1/2} e^{-2\pi i n t} dt - \int_{1/2}^1 e^{-2\pi i n t} dt = \\ &= \left(e^{-\pi i n} - 1 - \left(1 - e^{-\pi i n} \right) \right) \frac{1}{-2\pi i n} = \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{\pi i n}\end{aligned}$$

$$\text{Luego } \sum \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \text{sen}(2\pi n x) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \text{sen}(2\pi(2k+1)x)$$

Las gráficas de $S_3 f$, $S_5 f$, ... tienen el aspecto siguiente:

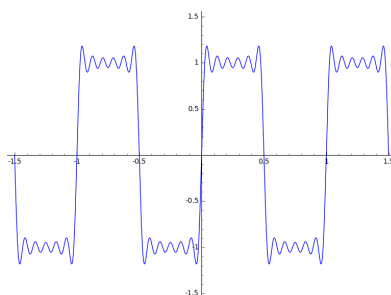


Figura 4.10.

Ejercicios: Proponemos como ejercicio calcular los siguientes desarrollos de Fourier y esbozar las gráficas de S_3f y S_5 para cada una de las siguientes funciones:

1. $f(t) = \cos^2(\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi t)$

2. $f(t) = |\text{sen}(2\pi t)| \quad 0 \leq t < 1$

$$f \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4\pi n t)}{4n^2 - 1}$$

3. $f(t) = |\cos(2\pi t)|$

$$f \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(4\pi n t)}{4n^2 - 1}$$

4. $f(t) = t^2 \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$

$$f \sim \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(2\pi n t)$$

4.1. Los detalles de un ejemplo paradigmático

La evidencia “experimental” acumulada con los ejemplos anteriores parece confirmar la hipótesis de Fourier y, por tanto, podemos reconstruir f a partir de su “espectro”, o sea, de sus coeficientes $\hat{f}(n)$. A continuación vamos a elaborar con detalle uno de ellos. Por razones de carácter natural en La Teoría e los Números vamos a escoger el ejemplo 3.

Sea $y = (x)$ cuya serie de Fourier es

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi n x)}{n}$$

$$S_N(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\text{sen}(2\pi n x)}{n}$$

1º cuestión.- ¿Fijado $x \in [0, 1]$ converge la serie $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum \frac{\text{sen}(2\pi nx)}{n}$?

2º cuestión.- ¿En el caso de que la respuesta a la pregunta anterior sea afirmativa, es el límite la propia función $y = (x)$?

Veamos la primera pregunta: el primer test de convergencia, el de fuerza bruta o acotación por una serie de términos positivos, nos dice que

$$\left| \frac{\text{sen}(2\pi nx)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

y esto no nos vale puesto que la serie armónica $\sum \frac{1}{k}$ es divergente.

Luego, si la serie deviene convergente, será debido a la cancelación producida por los cambios de signo de $\text{sen}(2\pi nx)$, $n = 1, 2, \dots$. Por otro lado, los coeficientes $\frac{1}{n}$ decaen monótonamente.... Es está una situación clásica que cae bajo la influencia del siguiente lema debido a Abel, y que es una versión del método de integración por partes del calculo diferencial:

Teorema 11. Lema de Abel.- Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos y $b : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una función con derivada continua. Tenemos que:

$$\sum_{k=1}^n a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_1^n b'(t)A(t) dt$$

donde $A(t) = \sum_{k \leq t} a_k$, ($A(t) = 0$ si $t < 1$) es una función escalonada ($A(t)$ es constante en $n \leq t < n + 1$).

Demostración: Es claro que $a_k = A(k) - A(k - 1)$. Luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b(k) &= \sum_{k=1}^n b(k)(A(k) - A(k - 1)) = \sum_{k=1}^n b(k)A(k) - \sum_{k=1}^{n-1} b(k+1)A(k) = \\ &= b(n)A(n) + \sum_{k=1}^{n-1} (b(k) - b(k+1))A(k) = b(n)A(n) - \sum_{k=1}^{n-1} A(k) \int_k^{k+1} b'(t) dt = \\ &= b(n)A(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} A(t)b'(t) dt = b(n)A(n) - \int_1^n A(t)b'(t) dt \end{aligned}$$

H.A.N.V.

En nuestro caso $b(n) = \frac{1}{n}$, $b'(t) = -\frac{1}{t^2}$ y $A(n) = \sum_{k=1}^n \text{sen}(2\pi kx) =$

$$= \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{2\pi i kx} \right) = \text{Im} \frac{e^{2\pi i x} - e^{2\pi i (n+1)x}}{1 - e^{2\pi i x}}$$

luego si $0 < x < 1$ tenemos que

$$|A(n)| \leq \frac{2}{2(1 - \cos(2\pi x))} = \frac{1}{1 - \cos(2\pi x)}$$

uniformemente en n .

El lema de Abel nos da:

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\operatorname{sen}(2\pi nx)}{n} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \operatorname{sen}(2\pi nx) - \frac{1}{\pi} \int_1^N \frac{1}{t^2} \left(\sum_{n \leq t} \operatorname{sen}(2\pi nx) \right) dt \end{aligned}$$

y, por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} \left(\sum_{n \leq t} \operatorname{sen}(2\pi nx) \right) dt$$

para $0 < x < 1$.

Por otro lado, es claro que $\lim S_N(0) = \frac{1}{2}$.

Es decir, que usando el lema de Abel podemos contestar afirmativamente a la primera cuestión. El lema de Abel resulta ser un arma poderosa para estudiar muchas otras series, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} e^{2\pi i n x} & \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^{\beta}} e^{2\pi i n x} & \quad \beta > 0 \end{aligned}$$

cuyo análisis proponemos como ejercicio.

En cuanto a la segunda cuestión, es claro que no es lo mismo saber que la serie converge que poder evaluarla explícitamente. Querriamos manipular la serie, encontrar identidades, para identificar su suma. Una de las dificultades es que no converge en valor absoluto, y eso nos molesta a la hora de manipularla. Hay, sin embargo, una técnica que nos permite derrotar a esta dificultad.

Dada una serie numérica $\sum a_n$ convergente con límite L , podemos modificarla por el siguiente procedimiento: sea r , $0 \leq r < 1$ y

$$u(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot r^n$$

Con ello, $u(r)$ converge absolutamente por comparación con una serie geométrica, resulta $\lim_{r \rightarrow 1} u(r) = L$.

La demostración de este hecho es un ejercicio sencillo que dejaremos al lector, con la siguiente indicación: aplicar el lema de Abel

$$u(r) - \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N a_n(1-r^n) + \sum_{N+1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=1}^N a_n(1-r^n) - \int_{N+1}^{\infty} A_{N+1}(t) r^t \log(r) dt$$

donde $A_M(t) = \sum_{M < n \leq t} a_n$.

Luego, si la serie $\sum a_n$ es convergente, resulta también es sumable por el método de Abel, que así se denomina este proceso:

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(r) = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

A veces hay series tales como $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ que son claramente divergentes pero que, sin embargo, son sumables:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} r^n = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$$

En nuestro caso, como ya conocemos que $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum \frac{\text{sen}(2\pi n x)}{n}$ con $0 < x < 1$ es convergente, sabemos que es sumable, y que podemos calcular su suma por medio de

$$\lim_{r \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n \text{sen}(2\pi n x) \right)$$

¿Qué hemos ganado? Algo importante: fijado $0 < r < 1$, la serie resultante es absolutamente convergente, y eso nos da una gran libertad para minipularla: cambiar el orden de los términos, intercambiar el sumatorio con otros límites, etcétera.

Vamos a ello: Sea $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} u_r(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n \text{sen}(2\pi n x) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Im} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Im}(\log(1-z)) \end{aligned}$$

donde $z = r \cdot e^{2\pi i x}$ y $\log(1-z) = \log|1-z| + i \arg(1-z)$. Y habida cuenta que $\text{Re}(1-z) = 1 - r \cos(2\pi x) > 0$ hemos tomado $\arg(1-z) = \arctan \frac{-r \text{sen}(2\pi x)}{1 - r \cos(2\pi x)} \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Luego:

$$u_r(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{-r \operatorname{sen}(2\pi x)}{1 - r \cos(2\pi x)}\right)$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} u_r(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{-\operatorname{sen}(2\pi x)}{1 - \cos(2\pi x)}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-\cot(\pi x)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Conclusión:

1. $(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n}$
2. Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces, la serie converge al valor $\frac{1}{2}$.
3. Si $x \notin \mathbb{Z}$, entonces, la serie reproduce el valor (x) , esto es, parte fraccionaria de x .

Luego, excepto por los puntos malos (donde (x) deja de ser diferenciable) hemos obtenido un “EXITO TOTAL”. Incluso en los puntos malos obtenido algo que es valorable, el promedio

$$\frac{1}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} (x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} (x)}{2}$$

de los valores límites de (x) en el punto de discontinuidad.

Una crítica razonable: El éxito anterior depende de un “milagro”: haber identificado la serie $\log(1-z)$. No parece razonable que para una función arbitraria f podamos encontrar siempre una identidad semejante. A continuación vamos a elaborar un poco el método para convencernos de que los milagros son innecesarios, en este caso.

Escribimos

$$\begin{aligned} u_r(x) = u(r, x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \widehat{f}(n) \cdot e^{2\pi i n x} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{2\pi i n x} \int_{-1/2}^{1/2} f(t) e^{-2\pi i n t} dt = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} f(t) P_r(x-t) dt = f * P_r(x) \end{aligned}$$

donde $P_r(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{2\pi i n y}$ y $f(t) = (t)$.

Obsérvese que debido a la convergencia absoluta de la serie $P_r(y)$ todas las identidades del cálculo anterior son legítimas.

Ahora bien:

$$\begin{aligned} P_r(y) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(2\pi n y) = 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (r e^{2\pi i y})^n \right) = \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{r e^{2\pi i y}}{1 - r e^{2\pi i y}} = \operatorname{Re} \frac{1 + r e^{2\pi i y}}{1 - r e^{2\pi i y}} = \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(2\pi y) + r^2} \end{aligned}$$

Observemos las propiedades siguientes:

1. $P_r(y) \geq 0$ y $P_r(-y) = P_r(y)$ para $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$.
2. $\int_{-1/2}^{1/2} P_r(y) \, dy = 1 - \int_{-1/2}^{1/2} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(2\pi n y) \, dy = 1 -$
3. Dado $\varepsilon > 0$ resulta que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\varepsilon < |y| \leq \frac{1}{2}} P_r(y) \, dy = 0$$

Es decir, tenemos que las gráficas se van concentrando alrededor del origen (propiedad 3), teniendo todas masa unidad (propiedad 2). Luego la situación es completamente similar a la familia ϕ_ε del anterior capítulo.

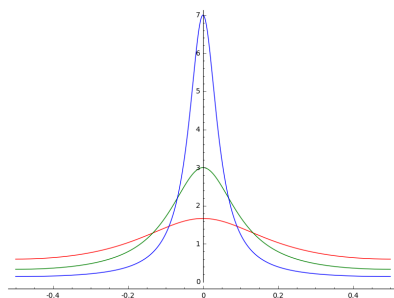


Figura 4.11.

Ejercicio:

1. Demostrar que si f es continua en un punto x_0 y acotada, entonces:

$$\lim_{r \rightarrow 1} P_r * f(x_0) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x_0 - t) P_r(t) \, dt = f(x_0)$$

2. Demostrar que si f es acotada con un salto en x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f^-(x_0)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f^+(x_0)$, entonces:

$$\lim_{r \rightarrow 1} P_r * f(x_0) = \frac{1}{2} (f^+(x_0) + f^-(x_0)).$$

Demostración: Vamos a realizar la demostración del ejercicio 1.

$$\begin{aligned} P_r * f(x_0) - f(x_0) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x_0 - t) P_r(t) dt - f(x_0) \int_{-1/2}^{1/2} P_r(t) dt = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} (f(x_0 - t) - f(x_0)) P_r(t) dt = \\ &= \int_{|t| \leq \delta} (f(x_0 - t) - f(x_0)) P_r(t) dt + \\ &+ \int_{\delta < |t| \leq \frac{1}{2}} (f(x_0 - t) - f(x_0)) P_r(t) dt = \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Es claro que podemos hacer $I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ más que tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeño, debido a la continuidad de f en x_0 .

Por otro lado, fijado $\delta > 0$, $|I_2| \leq 2 \max |f(t)| \cdot \int_{\delta < |t| \leq \frac{1}{2}} P_r(t) dt$ tiende a 0 cuando $r \rightarrow 1$.

Los detalles, así como el ejercicio 2, se dejan al lector.

H.A.N.V.

Obsérvese que puesto en esta perspectiva, el calculo de la suma de la serie de Fourier de la función (x) ya no parece tan milagroso, sino que es consecuencia de las propiedades generales de la convolución de las funciones con esos núcleos P_r (o similares que encontraremos más adelante) que son “aproximaciones de la identidad”.

Finalmente, conviene señalar que la función de las variables radio r y ángulo t dada por

$$u(r, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n t}$$

es una función armónica: $\Delta u = 0$, donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ $x = r \cos(2\pi t)$, $y = r \sin(2\pi t)$.

Luego, en particular, nuestro ejemplo nos ha llevado a resolver un problema famoso de las E.D.P., a saber: dada una función f , encontrar una función

armónica en el interior del disco que tenga a f como valores en la frontera (problema de Dirichlet, que analizaremos más adelante).

Capítulo 5

Propiedades de los coeficientes de Fourier. Aproximaciones de la identidad. Teoría L^2 .

5.1. Propiedades de los coeficientes de Fourier.

Los coeficientes de Fourier de una función integrable reflejan el tamaño y la lisura de la función de manera bastante precisa. También presentan una interacción explícita con las transformaciones de la recta: traslaciones, simetrías y dilataciones. A continuación elaboramos una lista de algunas de estas propiedades:

1. $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_{L^1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Puesto que

$$|\widehat{f}(n)| = \left| \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t} f(t) dt \right| \leq \int_{-1/2}^{1/2} |e^{-2\pi i n t} f(t)| dt = \|f\|_{L^1}.$$

2. Traslaciones:

- a) Sea $\delta_y f(x) = f(x - y)$, tenemos que

$$\widehat{\delta_y f}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n x} f(x - y) dx = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i (t+y)n} f(t) dt = e^{-2\pi i n y} \widehat{f}(n).$$

- b) Sea $g(x) = e^{2\pi i n x} f(x)$. Resulta que:

$$\widehat{g}(m) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i m x} e^{2\pi i n x} f(x) dx = \widehat{f}(m - n).$$

En otras palabras: los coeficientes de Fourier de la función trasladada $\delta_y f$ se obtienen multiplicando los coeficientes de f por los caracteres

$e^{2\pi i n y} : \widehat{\delta_y f}(n) = e^{2\pi i n y} \widehat{f}(n)$. Recíprocamente: Si multiplicamos la función periódica (de periodo 1) $f(x)$ por el caracter $e^{2\pi i n x}$ resulta que:

$$e^{2\pi i n x} \widehat{f(x)}(m) = \widehat{f}(m - n).$$

Es decir, los coeficientes del producto $e^{2\pi i n x} f(x)$ se obtienen trasladando los de f en la cantidad n .

"Traslación se convierte en multiplicación por $e^{2\pi i n x}$ ".

3. Funciones pares: Sea $f \in L^1[-1/2, 1/2]$ par, es decir, $f(-x) = f(x)$, luego:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t} f(t) dt = \int_{-1/2}^0 e^{-2\pi i n t} f(t) dt + \int_0^{1/2} e^{-2\pi i n t} f(t) dt = \\ &= \int_0^{1/2} e^{2\pi i n t} f(-t) dt + \int_0^{1/2} e^{-2\pi i n t} f(t) dt = 2 \int_0^{1/2} \cos(2\pi n t) f(t) dt = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \cos(2\pi n t) f(t) dt = \widehat{f}(-n) \end{aligned}$$

En particular:

$$\widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n).$$

Esta paridad de los coeficientes nos permite escribir la serie de Fourier de f de f agrupando los términos correspondientes a las frecuencias n y $-n$ para obtener una serie de cosenos:

$$f \sim \sum \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \sim \widehat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) \cos(2\pi n x).$$

"La serie de Fourier de las funciones pares puede escribirse como una serie de cosenos".

4. Funciones impares: Supongamos ahora que $f \in L^1[-1/2, 1/2]$ es impar: $f(-x) = -f(x)$.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t} f(t) dt = 2i \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sen}(2\pi n t) f(t) dt = \\ &= -2i \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sen}(2\pi(-n)t) f(t) dt = -\widehat{f}(-n) \end{aligned}$$

Luego:

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \sim \sum_{n=1}^{\infty} [\widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} - \widehat{f}(n) e^{-2\pi i n x}] \sim 2i \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) \operatorname{sen}(2\pi n x).$$

"La serie de Fourier de las funciones impares puede escribirse como una serie de senos".

5. Comportamiento con respecto a la derivación: Supongamos que $f \in C^1(\mathbb{T})$, es decir, que tanto f como su derivada f' son funciones continuas y periódicas de periodo 1. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(n) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t} f'(t) dt = [e^{-2\pi i n t} f(t)]_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} f(t) d e^{-2\pi i n t} = \\ &= 0 + 2\pi i n \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t} f(t) dt = 2\pi i n \widehat{f}(n)\end{aligned}$$

En general, si $f \in C^k(\mathbb{T})$ resulta que

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\pi i n)^k \widehat{f}(n).$$

Es decir, desde el punto de vista de los coeficientes de Fourier, la derivación se convierte en multiplicación por $2\pi i n$. Esta es una de las propiedades cruciales de las series (y de la transformada) de Fourier que explica su enorme éxito para abordar problemas de ecuaciones diferenciales. Otra observación interesante es que si derivar k -veces se torna en multiplicar por el factor $(2\pi i n)^k$, nada nos impide definir **media-derivada** como la operación consistente en multiplicar los coeficientes de Fourier por el factor $(2\pi i n)^{1/2}$, o π -derivadas o $1+i$, etc. Más adelante explotaremos esta mina y la ampliación de nuestra libertad de cálculo que su posesión conlleva.

Sea $f \in C^k(\mathbb{T})$. Despejemos los coeficientes de f en función de los de $f^{(k)}$, obtenemos:

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{|\widehat{f^{(k)}}(n)|}{|2\pi n|^k} \leq (2\pi n)^{-k} \|f^{(k)}\|_1.$$

Luego, si $f \in C^k(\mathbb{T})$ sus coeficientes de Fourier decaen como $\frac{1}{|n|^k}$ cuando $|n| \rightarrow \infty$. Cuanto más lisa es la función f más rápidamente decaen sus coeficientes de Fourier: Lisura implica decaimiento. Más adelante veremos que esta observación tiene también una recíproca (decaimiento de los coeficientes de Fourier implica lisura de la función), que precisaremos convenientemente.

6. Lema de Riemann-Lebesgue:

Lema 3. Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$ se verifica que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(n)| = 0.$$

Demostración: Que los coeficientes $\widehat{f}(n)$ tiendan a cero es claro para las funciones $f \in C^1(\mathbb{T})$ por lo visto en el apartado anterior.

En el capítulo 2 vimos que

$$f_\epsilon(t) = \int_{-1/2}^{1/2} \phi_\epsilon(x-t)f(t)dt$$

converge a f en $L^1(\mathbb{T})$, siendo $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{T})$. (Donde $\phi_\epsilon = \epsilon^{-1}\phi(x/\epsilon)$ y ϕ es una función no negativa, de clase C^∞ y soporte contenido en $[-1, 1]$).

Luego, fijado $\delta > 0$ existe $g \in C^\infty(\mathbb{T})$ ($g = f_\epsilon$ para algún ϵ) de manera que

$$\|f - g\|_1 \leq \delta/2.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &\leq |\widehat{f}(n) - \widehat{g}(n)| + |\widehat{g}(n)| \leq \\ &\leq \|f - g\|_1 + \frac{\|g\|_1}{|2\pi n|} \leq \delta, \end{aligned}$$

siempre que $|n| \geq \frac{\|g\|_1}{\pi\delta}$ y como lo anterior es cierto quienquiera que sea $\delta > 0$ resulta que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(n)| = 0.$$

H.A.N.V.

7. Convolución: Dadas $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ sabemos que $f * g \in L^1(\mathbb{T})$.

$$\widehat{f * g}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n x} \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t)g(t)dt dx = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).$$

5.2. Fórmula para las sumas parciales.

Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$ escribimos:

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{-N}^N \widehat{f}(n)e^{2\pi i n x} = \sum_{-N}^N \left(\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t} f(t)dt \right) e^{2\pi i n x} = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{-N}^N e^{2\pi i n(x-t)} \right) f(t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} D_N(x-t)f(t)dt = D_N * f(x), \end{aligned}$$

donde $D_N(y) = \sum_{-N}^N e^{2\pi i n y}$ es el denominado **núcleo de Dirichlet**. Tenemos que:

$$\begin{aligned} D_N(y) &= 1 + 2 \sum_1^N \cos(2\pi n y) = 1 + 2Re \sum_1^N e^{2\pi i n y} = \\ &= 1 + 2Re \frac{e^{1\pi i y} - e^{2\pi i (N+1)y}}{1 - e^{2\pi i y}} = \\ &= 1 + 2Re \frac{(e^{2\pi i y} - e^{2\pi i (N+1)y})(1 - e^{-2\pi i y})}{(1 - e^{2\pi i y})(1 - e^{-2\pi i y})} = \\ &= 1 + 2 \frac{\cos(2\pi y) - \cos(2\pi(N+1)y) - 1 + \cos(2\pi N y)}{2 - 2\cos(2\pi y)} = \\ &= \frac{\cos(2\pi N y) - \cos(2\pi(N+1)y)}{1 - \cos(2\pi y)} = \frac{\text{sen}(\pi(2N+1)y)}{\text{sen}(\pi y)}. \end{aligned}$$

5.2.1. Representación gráfica.

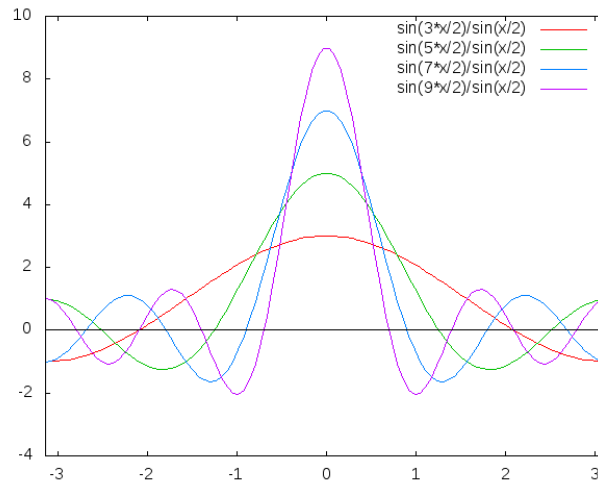


Figura 5.1.

- $D_N(y) = D_N(-y)$. Es una función par.
- Los ceros del núcleo de D_N están ubicados en los puntos

$$x_k = \frac{k}{2N+1}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

- El máximo de $|D_N(y)|$ dentro del intervalo $\frac{k}{2N+1} \leq x < \frac{k+1}{2N+1}$ verifica que

$$\frac{1}{\text{sen} \pi \frac{k+1}{2N+1}} \leq \max |D_N(y)| \leq \frac{1}{\text{sen} \pi \frac{k}{2N+1}}$$

Luego:

$$\text{máx}|D_N(y)| \simeq \frac{2N+1}{k}.$$

■

$$\int_{-1/2}^{1/2} D_N(x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} \left(1 + 2 \sum_1^N \cos(2\pi nx)\right) dx = 1.$$

■

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} |D_N(x)| dx &= 2 \int_0^{1/2} \left| \frac{\text{sen}(\pi(2N+1)x)}{\text{sen}(\pi x)} \right| dx = \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left| \frac{\text{sen}(\pi(2N+1)x)}{\pi x} \right| \left| \frac{\pi x}{\text{sen}(\pi x)} \right| dx = \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left| \frac{\text{sen}(\pi(2N+1)x)}{\pi x} \right| \left| \frac{\pi x}{\pi x + O(x^3)} \right| dx = \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left| \frac{\text{sen}(\pi(2N+1)x)}{\pi x} \right| \frac{1}{1 + O(x^2)} dx = \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left| \frac{\text{sen}(\pi(2N+1)x)}{\pi x} \right| (1 + O(x^2)) dx = \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left| \frac{\text{sen}(\pi(2N+1)x)}{\pi x} \right| dx + O(1) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^N \left| \frac{\text{sen}(\pi x)}{x} \right| dx + O(1) = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} \left| \frac{\text{sen}(\pi x)}{x} \right| dx + O(1) = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} |\text{sen}(\pi x)| dx + O(1) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 |\text{sen}(\pi x)| dx \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} + O(1) = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \log(N) + O(1). \end{aligned}$$

Es decir, que $\|D_N\|_1 \sim \frac{4}{\pi^2} \log(N)$ tiende a infinito cuando N crece. Esta propiedad diferencia a los núcleos de Dirichlet de otros núcleos de convolución que hemos encontrado antes, tales como el núcleo de Poisson:

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r < 1,$$

ó los $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\phi(x/\epsilon)$ mencionados en la demostración del lema de Riemann-Lebesgue. La teoría (acotación) de los operadores $S_n f$ es bastante más sutil que la de estos otros núcleos buenos (que eran no negativos) y dependerá de la cancelación producida por los cambios de signo del núcleo de Dirichlet.

No obstante, existe una manera natural de perturbar los núcleos de Dirichlet para conseguir otros que son como el de Poisson. La teoría que vamos a considerar acerca de las medias aritméticas de la sucesión $S_n f$ se debe al matemático húngaro Leopoldo Féjer:

5.3. Núcleos de Féjer.

Consideremos las medias aritméticas de las sumas parciales de la serie de Fourier de una función integrable $f \in L^1(\mathbb{T})$:

$$\sigma_N f(x) = \frac{S_0 f(x) + S_1 f(x) + \cdots + S_N f(x)}{N+1} = \sum_{-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}.$$

Los operadores σ_N pueden también escribirse de forma de convolución con un núcleo K_N que denominaremos núcleo de Féjer.

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \int_{-1/2}^{1/2} D_k(x-t) f(t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} K_N(x-t) f(t) dt,$$

donde

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \frac{\text{sen}(\pi(2k+1)x)}{\text{sen}(\pi x)}.$$

Un sencillo cálculo nos produce:

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{N+1} \left(1 + \frac{1}{\text{sen}(\pi x)} \text{Im} \sum_{k=1}^N e^{\pi i(2k+1)x}\right) = \\ &= \frac{1}{N+1} \left(1 + \frac{1}{\text{sen}(\pi x)} \text{Im} \left[e^{\pi i x} \frac{e^{2\pi i x} - e^{2\pi i(N+1)x}}{1 - e^{2\pi i x}} \right]\right) = \\ &= \frac{1}{N+1} \left(1 + \frac{1}{\text{sen}(\pi x)} \text{Im} \frac{e^{\pi i x} (1 - e^{-2\pi i x})(e^{2\pi i x} - e^{2\pi i(N+1)x})}{2 - 2\cos(2\pi x)}\right) = \\ &= \frac{1}{N+1} \left(1 + \frac{1}{\text{sen}(\pi x)} \frac{2\text{sen}(\pi x)(\cos(2\pi x) - \cos(2\pi(N+1)x))}{2 - 2\cos(2\pi x)}\right) = \\ &= \frac{1}{N+1} \left(1 + \frac{\cos(2\pi x) - \cos(2\pi(N+1)x)}{1 - \cos(2\pi x)}\right) = \\ &= \frac{1}{N+1} \left(\frac{1 - \cos^2(\pi(N+1)x) + \text{sen}^2(\pi(N+1)x)}{1 - \cos^2(\pi x) + \text{sen}^2(\pi x)}\right) = \\ &= \frac{1}{N+1} \left(\frac{\text{sen}(\pi(N+1)x)}{\text{sen}(\pi x)}\right)^2 \end{aligned}$$

Propiedades:

1. $K_N(x) \geq 0$.

2.

$$\int_{-1/2}^{1/2} K_N(x) dx = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \int_{-1/2}^{1/2} D_K(x) dx = 1.$$

3. Dado $\delta > 0$ tenemos que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta < |x| < 1/2} K_N(x) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \int_{\delta < |x| < 1/2} \left| \frac{1}{\text{sen}(\pi x)} \right|^2 dx = 0.$$

Estas tres propiedades que el núcleo de Féjer comparte con el de Poisson $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2}$, $0 \leq r < 1$ y con la familia $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\phi(x/\epsilon)$ considerada antes, son las responsables del buen comportamiento de las medias aritméticas σ_N y dan lugar a la siguiente definición.

Definición 10. Una familia de núcleos $\{G_\epsilon\}$ donde $\epsilon > 0$ es un parámetro real $\epsilon \in (0, \infty)$ es una **aproximación de la identidad** si cumple las siguientes propiedades:

1. $G_\epsilon \in L^1(\mathbb{T})$, $G_\epsilon \geq 0$, $\int_{-1/2}^{1/2} G_\epsilon(x) dx = 1$ para todo $\epsilon > 0$.2. Dado $\delta > 0$ se verifica que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta < |x| < 1/2} G_\epsilon(x) dx = 0.$$

En el caso en que $G_\epsilon(-x) = G_\epsilon(x)$ sean funciones pares, diremos que la aproximación de la identidad es simétrica y, entonces:

$$\frac{1}{2} = \int_{-1/2}^0 G_\epsilon(x) dx = \int_0^{1/2} G_\epsilon(x) dx, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Es decir, las aproximaciones de la identidad son familias de núcleos integrables, no negativos, de masa total igual a 1, pero que se van concentrando alrededor del origen: la propiedad 2. precisa esa condición, la masa fuera de un entorno del origen, por pequeño que este sea, tiende a cero con el parámetro ϵ .

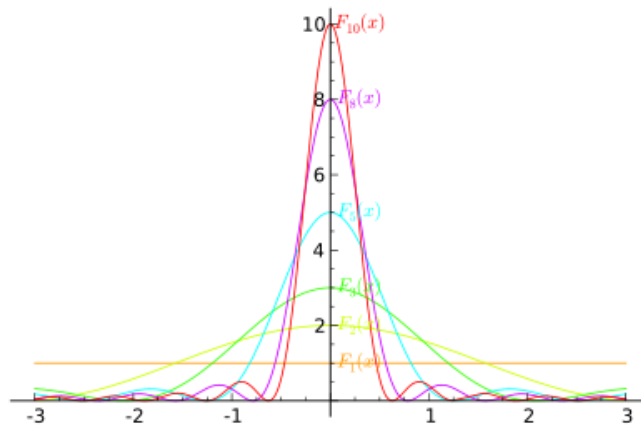


Figura 5.2.

Ejercicio: Comprobar una vez más que $K_N(\epsilon = 1/N)$, $P_r(\epsilon = 1 - r)$ y $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\phi(x/\epsilon)$ son aproximaciones de la identidad.

5.4. Teorema de Féjer.

Teorema 12. Teorema de Féjer. Sea $\{G_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ una aproximación de la identidad. Dada una función integrable f consideremos

$$f_\epsilon(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t)G_\epsilon(t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} G_\epsilon(x-t)f(t)dt = G_\epsilon * f(x)$$

Tenemos que:

1. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f - f_\epsilon\|_p = 0.$$

2. a) Si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ es continua en x_0 entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x_0) = f(x_0).$$

- b) Si $f \in C(\mathbb{T})$, entonces $f_\epsilon \rightarrow f$ uniformemente, es decir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f_\epsilon - f\|_\infty = 0.$$

- c) Supongamos que la aproximación de la identidad $\{G_\epsilon\}$ es simétrica y $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ tiene una discontinuidad de tipo salto en x_0 . Es decir, existe

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ y } f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Entonces:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+)).$$

Demostración:

1. Sea $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|f_\epsilon - f\|_p &= \left[\int_{-1/2}^{1/2} |f_\epsilon(x) - f(x)|^p dx \right]^{1/p} = \\ &= \left[\int_{-1/2}^{1/2} \left| \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t)G_\epsilon(t)dt - f(x) \right|^p dx \right]^{1/p} = \\ &= \left[\int_{-1/2}^{1/2} \left| \int_{-1/2}^{1/2} [f(x-t) - f(x)]G_\epsilon(t)dt \right|^p dx \right]^{1/p} \leq \\ &\leq \int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{-1/2}^{1/2} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} G_\epsilon(t)dt = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \|\delta_t f - f\|_p G_\epsilon(t)dt. \end{aligned}$$

En las estimaciones anteriores hemos utilizado las propiedades de los núcleos G_ϵ ($G_\epsilon \geq 0$, $\int_{-1/2}^{1/2} G_\epsilon = 1$) y la desigualdad integral de Minkowski.

Tenemos pues que estimar $\int_{-1/2}^{1/2} \|\delta_t f - f\|_p G_\epsilon(t)dt$, ahora bien, una integral puede ser pequeña porque el integrando lo sea o porque lo sea la medida del conjunto donde integremos:

Como $f \in L^p$, $\lim_{t \rightarrow 0} \|\delta_t f - f\|_p = 0$, luego, para estimar la integral anterior, dado $\eta > 0$, escogemos $\gamma > 0$ tal que $\|\delta_t f - f\|_p \leq \frac{\eta}{2}$ si $|t| < \delta$.

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \|\delta_t f - f\|_p G_\epsilon(t)dt &= \int_{|t| \leq \gamma} \|\delta_t f - f\|_p G_\epsilon(t)dt + \\ &+ \int_{\gamma \leq |t| \leq 1/2} \|\delta_t f - f\|_p G_\epsilon(t)dt = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

- I_1 es pequeña porque $\|\delta_t f - f\|_p$ lo es:

$$I_1 \leq \frac{\eta}{2} \int_{\gamma \leq |t| \leq 1/2} G_\epsilon(t)dt \leq \frac{\eta}{2} \int_{-1/2}^{1/2} G_\epsilon(t)dt = \frac{\eta}{2}.$$

- I_2 es pequeña porque para $\epsilon \rightarrow 0$ la masa de G_ϵ se queda fuera del conjunto de integración:

$$\int_{\gamma \leq |t| \leq 1/2} \|\delta_t f - f\|_p G_\epsilon(t)dt \leq 2\|f\|_p \int_{\gamma \leq |t| \leq 1/2} G_\epsilon(t)dt$$

y, fijado $\gamma > 0$, podemos encontrar $\epsilon = \epsilon(\gamma)$ tal que

$$\int_{\gamma \leq |t| \leq 1/2} G_\epsilon(t)dt \leq \frac{\eta}{2} \frac{1}{2\|f\|_p}, \text{ si } \epsilon < \epsilon(\gamma).$$

2. ■ Supongamos ahora que $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ es continua en x_0 :

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x_0) - f(x_0) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x_0 - t)G_\epsilon(t)dt - f(x_0) \int_{-1/2}^{1/2} G_\epsilon(t)dt = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} [f(x_0 - t) - f(x_0)]G_\epsilon(t)dt. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(x_0) - f(x_0)| &\leq \int_{-1/2}^{1/2} |f(x_0 - t) - f(x_0)|G_\epsilon(t)dt = \\ &= \int_{|t| \leq \gamma} |f(x_0 - t) - f(x_0)|G_\epsilon(t)dt + \int_{\gamma < |t| \leq 1/2} |f(x_0 - t) - f(x_0)|G_\epsilon(t)dt \leq \\ &\leq \omega_\gamma f(x_0) \int_{|t| \leq \gamma} G_\epsilon(t)dt + 2\|f\|_\infty \int_{\gamma < |t| \leq 1/2} \leq \\ &\leq \omega_\gamma f(x_0) + 2\|f\|_\infty \int_{\gamma < |t| \leq 1/2} G_\epsilon(t)dt. \end{aligned}$$

De nuevo dado $\eta > 0$ escogemos γ de manera que el módulo de continuidad $\omega_\gamma f(x_0) < \eta/2$. Con este $\gamma > 0$ fijo, las propiedades de la aproximación de la identidad nos aseguran la existencia de $\epsilon = \epsilon(\eta)$ tal que

$$2\|f\|_\infty \int_{\gamma < |t| \leq 1/2} G_\epsilon(t)dt \leq \eta/2, \text{ si } \epsilon \leq \epsilon(\eta).$$

- En el caso de $f \in C(\mathbb{T})$ es una consecuencia de la estimación anterior ya que entonces $\sup_x \omega_\gamma f(x) \rightarrow 0$ cuando $\gamma \rightarrow 0$ y podemos escoger un $\gamma > 0$ válido para todos los puntos x_0 .
- Supongamos la existencia de los límites laterales:

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x_0) &= \int_{-1/2}^0 f(x_0 - t)G_\epsilon(t)dt + \int_0^{1/2} f(x_0 - t)G_\epsilon(t)dt = \\ &= \int_{-1/2}^0 [f(x_0 - t) - f(x_0^+)]G_\epsilon(t)dt + \int_0^{1/2} [f(x_0 - t) - f(x_0^-)]G_\epsilon(t)dt + \\ &+ f(x_0^+) \int_{-1/2}^0 G_\epsilon(t)dt + f(x_0^-) \int_0^{1/2} G_\epsilon(t)dt = \\ &= \int_0^{1/2} ([f(x_0 - t) - f(x_0^+)] + [f(x_0 - t) - f(x_0^-)])G_\epsilon(t)dt + \\ &+ \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)] = I_\epsilon + \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]. \end{aligned}$$

Ahora bien, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon = 0$ por las mismas razones del caso anterior cuyos detalles dejamos al lector.

H.A.N.V.

Corolario 12.1. Dada $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, tenemos que $\sigma_N f \rightarrow f$ en L^p , en particular como cada $\sigma_N f(x) = \sum_{-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ es un polinomio trigonométrico, tenemos que, los polinomios trigonométricos son densos en el espacio $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$.

5.5. La Teoría L^2 .

En la cadena de los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^2(\mathbb{T})$ tiene un lugar de privilegio ya que es el único cuya norma proviene de un producto interior: dadas funciones $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ su producto interior es el escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \overline{g(x)} dx \Rightarrow \|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle.$$

Aunque en una primera aproximación esta propiedad no nos parezca tan decisiva, sin embargo, es extraordinariamente idónea para capturar las propiedades de ortogonalidad inherente a las funciones trigonométricas. L^2 es un ejemplo notable de los espacios llamados de **Hilbert**, que son espacios vectoriales cuya topología está inducida por un producto interior que les confiere la estructura de espacio métrico completo. A continuación vamos a sacar partido a estas propiedades del espacio L^2 para demostrar la convergencia de las series de Fourier en dicha norma.

Sea $f \in L^2(\mathbb{T})$, el teorema de Féjer nos asegura que los polinomios trigonométricos $\sigma_N f$ convergen a f en L^2 , es decir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N f - f\|_2 \rightarrow 0.$$

Consideremos la siguiente cuestión: dada $f \in L^2(\mathbb{T})$ entre todos los polinomios trigonométricos de grado $\leq n$, ¿cuál es el que está más próximo a f ?

En otras palabras: consideramos el conjunto $A_n = \left\{ p = \sum_{k=-n}^n a_k e^{2\pi i k x} \mid a_k \in \mathbb{C} \right\}$ y nos planteamos encontrar

$$\min_{p \in A_n} \|f - p\|_2.$$

Ahora bien, sea $p = \sum_{k=-n}^n a_k e^{2\pi i k x}$, por tanto:

$$\begin{aligned} \|f - p\|_2^2 &= \langle f - p, f - p \rangle = \\ &= \langle f - S_n f - p + S_n f, f - S_n f - p + S_n f \rangle = \\ &= \langle f - S_n f, f - S_n f \rangle - \langle f - S_n f, p \rangle + \langle f - S_n f, S_n f \rangle + \\ &+ \langle p, f - S_n f \rangle + \langle p, p \rangle - \langle p, S_n f \rangle + \\ &+ \langle S_n f, f - S_n f \rangle - \langle S_n f, p \rangle + \langle S_n f, S_n f \rangle \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\langle f - S_n f, p \rangle &= 0 = \langle p, f - S_n f \rangle \\ \langle f - S_n f, S_n f \rangle &= 0 = \langle S_n f, f - S_n f \rangle\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\|f - p\|_2^2 &= \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f\|_2^2 + \|p\|_2^2 - 2\operatorname{Re} \langle S_n f, p \rangle = \\ &= \|f - S_n f\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2 + \sum_{k=-n}^n |a_k|^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \overline{a_k}\end{aligned}$$

Pero

$$\sum_{k=-n}^n (|\widehat{f}(k)|^2 + |a_k|^2 - 2\operatorname{Re} \widehat{f}(k) \overline{a_k}) \geq 0$$

y sólo se anula cuando $a_k = \widehat{f}(k)$. Es decir

$$\|f - p\|_2^2 \geq \|f - S_n f\|_2^2.$$

¡Entre todos los polinomios trigonométricos de grado n es precisamente $S_n f$ el que minimiza la distancia

$$\|f - S_n f\|_2^2$$

!

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n f\|_2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sigma_N f\|_2 = 0.$$

¡¡Fourier tenía razón (al menos en L^2)!! La serie de Fourier de una función de cuadrado integrable converge (en L^2) a la función.

Corolario 1. Identidad de Bessel.

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n f\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n f, S_n f \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2\end{aligned}$$

H.A.N.V.

Ejemplo: Sea $y = (x)$, $0 \leq x < 1$, cuya serie de Fourier es

$$(x) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{-2\pi i n x}.$$

Por tanto, tenemos:

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 (x)^2 dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2}$$

Reagrupando términos produce:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

que es una fórmula que ya conocía Euler.

La función

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \operatorname{Re}(s) > 1,$$

es la famosa función zeta de Riemann que está últimamente relacionada con la distribución de los números primos en la sucesión de los enteros. El cálculo anterior puede escribirse como

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Proponemos como ejercicio calcular $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, (en general $\zeta(2n)$), a partir de la igualdad de Bessel para las funciones

$$f_k(x) = x^k, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

El resultado es que $\zeta(2n) = B_n \pi^{2n}$, donde los números B_n son racionales.

Sin embargo, nadie sabe calcular $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, etc. En el año 1978 se logró demostrar que $\zeta(3)$ es irracional, pero el método no ha podido extenderse al resto de los impares. Por ejemplo, ¿nadie sabe si

$$\zeta(5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$$

es irracional o racional!

5.6. Notas.

1. En futuros capítulos veremos que en $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, también es cierto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n f\|_p = 0.$$

Sin embargo, para $p \neq 2$ se trata de un resultado mucho más difícil de obtener, se debe a M. Riesz y forma parte de las contribuciones importantes del análisis matemático del siglo XX. Los casos extremos $p = 1$ ó $p = \infty$ son de índole distinta y allí la convergencia falla.

2. En los capítulos anteriores discutimos las relaciones de ortogonalidad $\langle e^{2\pi imx}, e^{2\pi inx} \rangle = \delta_{m,n} = 1$ si $m = n$ y a 0 en caso contrario.

En particular, estas relaciones implican la independencia lineal del sistema trigonométrico: supongamos que

$$\sum_{-N}^N \lambda_k e^{2\pi ikx} = 0,$$

entonces

$$0 = \left\langle \sum_{-N}^N \lambda_k e^{2\pi ikx}, \sum_{-N}^N \lambda_k e^{2\pi ikx} \right\rangle = \sum_{-N}^N |\lambda_k|^2,$$

lo que implica que $\lambda_k = 0$, $k = -N, \dots, N$.

Ahora estamos en condiciones de probar que es también completo: no podemos añadir ninguna función nueva al conjunto $\{e^{2\pi imx}\}$ que sea ortogonal a todas ellas.

Sea $\langle f, e^{2\pi inx} \rangle = \hat{f}(n) = 0$ para todo n . Entonces $S_n f(x) = 0$ y $\sigma_N f(x) = 0$ idénticamente. Por Féjer

$$\|f - \sigma_N f\|_2 \rightarrow 0,$$

luego $f \equiv 0$.

En este sentido podemos decir que:

- a) $\{e^{2\pi inx}\}$ es una base ortonormal del espacio $L^2(\mathbb{T})$. Es decir, forman un conjunto ortonormal completo de funciones: sus combinaciones lineales son densas.
- b)

Teorema 13. Teorema de Unicidad. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\hat{f}(n) = 0$ para todo n , entonces $f \equiv 0$.

Demostración: Lo hemos probado para $f \in L^2(\mathbb{T})$, pero el caso L^1 es idéntico: $\|f - \sigma_N f\|_1 \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$.

H.A.N.V.

Capítulo 6

La convergencia puntual de las series de Fourier.

En el capítulo anterior vimos que en el espacio $L^2(\mathbb{T})$ la serie de Fourier es convergente, es decir: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n f - f\|_2 = 0$ para toda función de cuadrado sumable. Sabemos también que si sustituimos las sumas parciales por las medias aritméticas $\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x)$, entonces $\sigma_n f(x)$ converge a $f(x)$ en todo punto de continuidad de la función integrable f ; incluso estudiamos el comportamiento en los puntos de discontinuidad tipo salto, etc. A continuación vamos a analizar una serie de resultados que atañen a la convergencia puntual de la serie y que generalizan los ejemplos considerados en el capítulo 4. Un papel central será desempeñado por el Lema de Riemann-Lebesgue, por lo que comenzaremos este análisis recapitulando su demostración y obteniendo una versión que es ligeramente más general.

6.1. Lema de Riemann-Lebesgue.

Lema 4. Riemann-Lebesgue. Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$ tenemos que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \right| = 0$$

donde la integral está considerada para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostración:

1. Si $f \in C^1(\mathbb{T})$ entonces podemos integrar por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx &= -\frac{1}{2\pi i \xi} \int_0^1 f(x) d e^{-2\pi i x \xi} = \\ &= -\frac{e^{-2\pi i \xi} f(1) - f(0)}{2\pi i \xi} + \frac{1}{2\pi i \xi} \int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} f'(x) dx. \end{aligned}$$

Luego

$$\left| \int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \right| \leq \frac{|f(0)|}{\pi|\xi|} + \frac{\|f'\|_1}{2|\xi|\pi}$$

tiene límite 0 cuando $|\xi| \rightarrow \infty$.

2. Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$ y dado $\epsilon > 0$ elegimos $g \in C^1(\mathbb{T})$ de manera que $\|f - g\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \right| &\leq \left| \int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} g(x) dx \right| + \\ &+ \left| \int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} (f(x) - g(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{|g(0)|}{\pi|\xi|} + \frac{\|g\|_1}{2\pi|\xi|} + \|f - g\|_1 \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Siempre que

$$\|\xi\| \geq \frac{2}{\epsilon} \left(\frac{|g(0)|}{\pi} + \frac{\|g\|_1}{2\pi} \right).$$

H.A.N.V.

El cálculo de los coeficientes de Fourier de una función exhibe explícitamente que estos dependen globalmente de ella y no sólo de sus valores próximos a un punto dado. Sin embargo, ocurre que la convergencia de la serie en un punto sólo depende de los valores de la función en un entorno suyo.

6.2. Teorema de Localización.

Teorema 14. De Localización. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ nula en un abierto $U \subset [-1/2, 1/2]$ entonces la sucesión $S_n f(x)$ converge a cero en todo punto $x \in U$. Además, la convergencia es uniforme en cada intervalo cerrado $[a, b] \subset U$.

Corolario 14.1. Sean f, g funciones del espacio $L^1(\mathbb{T})$ que coinciden en un abierto $U \subset [-1/2, 1/2]$ entonces sus series de Fourier son equiconvergentes en U : Si la serie de f converge en un punto de U (respectivamente a la serie de g) entonces también lo hace la de g (respectivamente la de f) y tienen el mismo límite.

Demostración: Del Teorema de Localización.

1. Sea $x \in U$ entonces

$$S_n f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t) D_n(t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{f(x-t)}{\text{sen}(\pi t)} \text{sen}(\pi(2n+1)t) dt.$$

Observemos que al ser $f(U) \equiv 0$ la función $g(t) = \frac{f(x-t)}{\operatorname{sen}(\pi t)}$ es integrable. El lema de Riemann-Lebesgue nos permite concluir que:

$$|S_n f(x)| = \frac{1}{2} \left| \int_{-1/2}^{1/2} g(t) e^{-2\pi i(n+1/2)t} dt - \int_{-1/2}^{1/2} g(t) e^{2\pi i(n+1/2)t} dt \right| \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

2. La convergencia uniforme necesita de un regate adicional: dado $[a, b] \subset U$ abierto en $[-1/2, 1/2]$ existe $\delta > 0$ de manera que $[a, b] \subset [a - \delta, b + \delta] \subset U$. Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{T})$ se anula en U , entonces fijado un número positivo η podemos construir una función $g \in C^\infty(\mathbb{T})$ de manera que:

- a) g se anula en $[a - \delta/2, b + \delta/2]$.
 b) $\|f - g\|_1 \leq \eta$.

Este lema es una sencilla consecuencia de las propiedades de la aproximación de la identidad construida al final del capítulo 2. $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-1} \phi(x/\epsilon)$ donde $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$, $\operatorname{sop}(\phi) \subset [-1, 1]$, $\int \phi(x) dx = 1$ y $\phi \geq 0$.

Lema 5. Sea $f_\epsilon(x) = \phi_\epsilon * g$. Entonces:

- a) $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{T})$.
 b) $\operatorname{sop}(f_\epsilon) \subset \operatorname{sop}(\phi_\epsilon) + \operatorname{sop}(f)$. En particular si $\epsilon < \delta/2$ se verifica que $f_\epsilon(x) = 0$ en $[a - \delta/2, b + \delta/2]$.

Obsérvese que

$$f_\epsilon(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \phi_\epsilon(x-t) f(t) dt$$

y el producto $\phi_\epsilon(x-t)f(t)$ es idénticamente cero si $\epsilon < \delta/2$, $x \in [a - \delta/2, b + \delta/2]$.

- c) $\|f - f_\epsilon\|_1 \rightarrow 0$ si $\epsilon \rightarrow 0$.

Luego basta con tomar $g = f_\epsilon$, siempre que $\epsilon < \delta/2$ y $\|f - f_\epsilon\|_1 \leq \eta$.

Fin de la demostración de la convergencia uniforme:

Dado $\epsilon > 0$ escogemos g con las propiedades anteriores:

$g \in C^\infty(\mathbb{T})$, $g(x) = 0$ si $x \in [a - \delta/2, b + \delta/2]$ y $\|f - g\|_1 \leq (\epsilon/2) |\operatorname{sen}(\phi(\delta/2))|$.

Entonces:

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= S_n g(x) + S_n (f - g)(x) = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{g(x-t)}{\operatorname{sen}(\pi t)} \operatorname{sen}(\pi(2n+1)t) dt + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{f(x-t) - g(x-t)}{\operatorname{sen}(\pi t)} \operatorname{sen}(\pi(2n+1)t) dt. \end{aligned}$$

Es decir, integrando por partes en la primera de las integrales obtenemos, si $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |S_n f(x)| &\leq \frac{1}{\pi(2n+1)} \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{g(x-t)}{\operatorname{sen}(\pi t)} \right) \right| dt + \\ &\quad + \frac{1}{|\operatorname{sen}((\pi\delta)/2)|} \|f - g\|_1 \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi(2n+1)} \left(\frac{1}{|\operatorname{sen}((\pi\delta)/2)|} \|g'\|_1 + \frac{\pi}{|\operatorname{sen}((\pi\delta)/2)|^2} \|g\|_1 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{|\operatorname{sen}((\pi\delta)/2)|} \|f - g\|_1 \leq \epsilon \end{aligned}$$

si n es suficientemente grande (uniformemente en $x \in [a, b]$).

H.A.N.V.

6.3. Convergencia puntual de la serie de Fourier. Criterio de Dini.

Dada una función integrable $f \in L^1(\mathbb{T})$ podemos escribir $S_n f(x) = f * D_n(x)$ de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t) D_n(t) dt = \int_0^{1/2} f(x-t) D_n(t) dt + \int_{-1/2}^0 f(x-t) D_n(t) dt = \\ &= \int_0^{1/2} f(x-t) D_n(t) dt + \int_0^{1/2} f(x+t) D_n(t) dt = \\ &= \int_0^{1/2} (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Esta expresión combinada con el lema de Riemann-Lebesgue sugiere el siguiente:

Lema 6. Criterio de Dini. *Supongamos que dado un punto x existe A tal que la función $g(t) = \frac{1}{|t|} \left| \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - A \right| \in L^1(\mathbb{T})$ entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = A.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} S_n f(x) - A &= \int_0^{1/2} (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) dt - 2A \int_0^{1/2} D_n(t) dt = \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left(\frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - A \right) \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi t)} \operatorname{sen}(\pi(2n+2)t) dt \end{aligned}$$

6.3. CONVERGENCIA PUNTUAL DE LA SERIE DE FOURIER. CRITERIO DE DINI.73

Obsérvese que la condición de Dini

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{|t|} \left| \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - A \right| dt < \infty$$

implica que la función

$$h(t) = \left(\frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - A \right) \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi t)}$$

sea integrable. Estamos pues en condiciones de aplicar el lema de Riemann-Lebesgue para concluir que

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x).$$

H.A.N.V.

Aplicaciones del Criterio de Dini:

1. Supongamos que la función continua $f \in C(\mathbb{T})$ pertenece a la clase de Lipschitz (ó de Hölder) Λ^α , $0 < \alpha \leq 1$. Esto es: existe una constante finita c tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$, para todo $x, y \in [-1/2, 1/2]$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x), \quad x \in [-1/2, 1/2].$$

2. Con mayor generalidad: Supongamos que f es Lipschitziana de orden α ($\alpha > 0$) a trozos. Es decir, existe un número finito de puntos

$$a_0 = -1/2 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1/2$$

de manera que $f \setminus [a_j, a_{j+1}] \in \Lambda^\alpha$ y existen

$$f(a_j^+) = \lim_{t \rightarrow a_j^+} f(t)$$

$$f(a_j^-) = \lim_{t \rightarrow a_j^-} f(t)$$

Entonces:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x),$$

para todo punto de continuidad x de f .

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(a_j) = \frac{f(a_j^-) + f(a_j^+)}{2}$$

Basta con ver que en ambos casos se cumple el criterio de Dini:

Demostración: Si estamos en un punto de continuidad x , la propiedad $f \in \Lambda^\alpha$ se traduce en la estimación siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|t|} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{|t|} \left(\frac{|f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|}{2} \right) \leq c|t|^{-1+\alpha} \in L^1(\mathbb{T}) \end{aligned}$$

En el caso de un salto tenemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|t|} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right| \leq \\ & \leq \frac{|f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)|}{2} \leq c|t|^{-1+\alpha} \in L^1(\mathbb{T}) \end{aligned}$$

H.A.N.V.

Estos resultados de convergencia de las series de Fourier son bastante satisfactorios por cuanto se aplican a una gran cantidad de funciones interesante. Por ejemplo: funciones f que son diferenciables a trozos con derivadas acotadas ya que el teorema del valor medio implica que, en cada trozo, están en el espacio Λ^1 de Lipschitz. No obstante, la condición de pertenecer a Λ^α es mucho más restrictiva que la de ser continua. Es el momento adecuado de indicar que, en general, resulta falso para funciones continuas la convergencia en todo los puntos de la serie de Fourier. Este es un resultado debido a Du Bois Raymond que analizaremos al final del capítulo y que contiene el germen de una técnica importante del Análisis Funcional: el principio de la condensación de las singularidades.

El criterio de Dini nos provee con una condición suficiente para la convergencia que depende básicamente del módulo de continuidad de f y que es fácil de verificar cuando f es lisa. Sin embargo no es, ni mucho menos, una condición necesaria. Existen otros criterios y el lector interesado puede encontrarlos en la Biblia de las Series Trigonómicas, o sea, el citado libro de mi bisabuelo A. Zygmund: "*Trigonometric Series*", Cambridge Univ. Press.

El teorema de Fejer nos daba, en particular, que $\|\sigma_N f\|_\infty = \|K_N * f\|_\infty \leq \|K_N\|_1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$. Es decir, los valores de los polinomios trigonométricos $\sigma_N f$ no pueden sobrepasar los valores de la función f . A continuación vamos a estudiar el fenómeno de Gibbs que exhibe que ese no es el caso de los polinomios $S_n f(x)$.

6.4. Fenómeno de Gibbs.

Consideremos la función $h(t) = 0$ si $-1/2 \leq t < 0$ y 1 si $0 \leq t \leq 1/2$. Queremos estudiar $S_n h(x)$ cuando $x > 0$ es pequeño. Tenemos que:

$$\begin{aligned} S_n h(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} h(x-t) D_n(t) dt = \int_{-1/2}^x D_n(t) dt = \\ &= \int_{-1/2}^x D_n(t) dt - \int_{-1/2}^{-1/2+x} D_n(t) dt \end{aligned}$$

Observemos que:

$$F(x) = \int_{-1/2}^x D_n(t) dt$$

alcanza un máximo en el punto $\frac{1}{12n+1}$:

$$F'\left(\frac{1}{2n+1}\right) = D_n\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0; \quad F''\left(\frac{1}{2n+1}\right) < 0.$$

Luego:

$$\begin{aligned} S_n h\left(\frac{1}{2n+1}\right) &= \int_{-1/2}^{1/(2n+1)} D_n(t) dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^{1/(2n+1)} \frac{\text{sen}(\pi(2n+1)t)}{\text{sen}(\pi t)} dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^{1/(2n+1)} \frac{\text{sen}(\pi(2n+1)t)}{\pi t} dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(u)}{u} du + O\left(\frac{1}{n}\right) = 1,08\dots + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Claramente:

$$S_n h\left(-\frac{1}{2n+1}\right) = 1 - (1,08\dots) + O\left(\frac{1}{n}\right) = -0,08\dots + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Luego la gráfica de $S_n h(x)$ sobrepasa a la de $h(x)$, por arriba, cerca de $\frac{1}{2n+1}$ y, por debajo, cerca de $-\frac{1}{2n+1}$, en una proporción $\simeq 8/100$ cuando $n \rightarrow \infty$. Este fenómeno lo presentan todas las funciones Lipschitzianas a trozos en los puntos de discontinuidad. Los detalles se dejan al lector.

Aquí dejamos una muestra del Fenómeno de Gibbs:

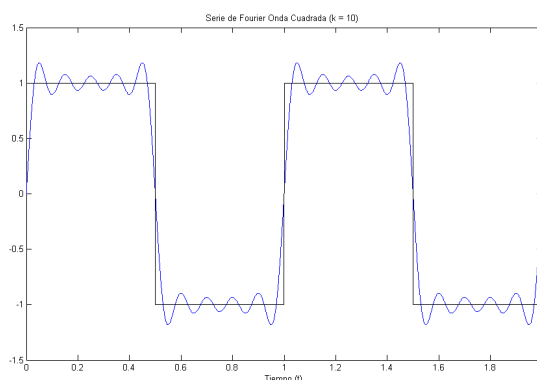


Figura 6.1.

Podemos realizar una crítica interesante a los resultados de convergencia obtenidos en los párrafos anteriores. A saber: no permiten estimar la diferencia $|f(x) - S_n f(x)|$ y, por tanto, no pueden utilizarse en el Análisis Numérico. En general, para cuantificar la rapidez de la convergencia de $S_n f(x)$ hay que conocer las propiedades de lisura (diferenciabilidad) de la función f . Cuanto más lisa sea una función más rápidamente convergerá su serie de Fourier. Por ejemplo, si $f \in C^k(\mathbb{T})$, $k \geq 2$, entonces

$$|f(x) - S_n f(x)| = O\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right),$$

etc; pero la discusión de este tema la pospondremos para más adelante.

A continuación vamos a analizar la construcción de du Bois Raymond que exhibe como la simple continuidad de la función f no es garantía de la convergencia de su serie de Fourier en un punto dado.

Proposición 2. du Bois Raymond. *Existe una función continua $f \in C(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en un punto.*

Demostración: Para entender esta construcción comencemos recordando la gráfica del núcleo de Dirichlet:

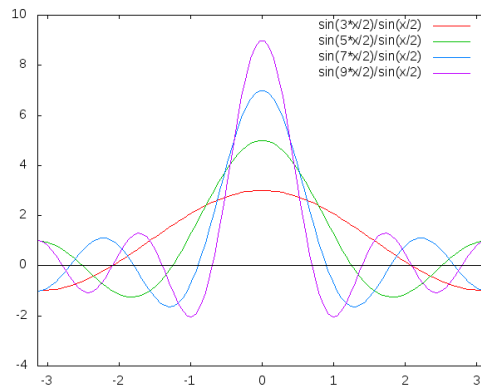


Figura 6.2.

$$\int_{-1/2}^{1/2} |D_n(x)| dx \geq \frac{4}{\pi^2} \log(2n+1)$$

Consideremos la función $h_n(x) = \text{signo de } D_n(x) = 1$ si $D_n(x) > 0$ y -1 si $D_n(x) < 0$. Esta es su gráfica:

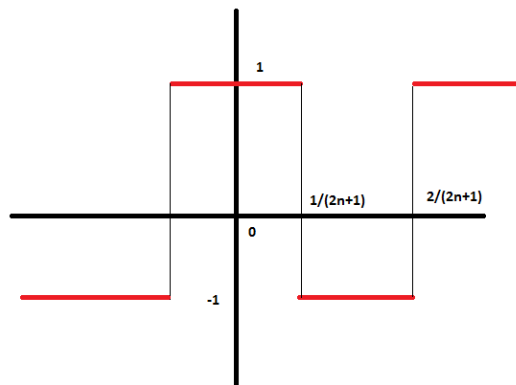


Figura 6.3.

Tenemos que:

$$\int_{-1/2}^{1/2} |D_n(x)| dx = \int_{-1/2}^{1/2} D_n(x) h_n(x) dx = \sum_{k=-n}^n \widehat{h}_n(k) = S_n h_n(0)$$

Luego, para cada n tenemos una función h_n tal que $|h_n| \leq 1$ y $S_n h_n(0) \geq \frac{4}{\pi^2} \log(2n+1)$.

El siguiente regate consiste en modificar h_n para hacerla continua de manera que se sigan manteniendo las estimaciones anteriores:

Consideremos $P_n(x) = \sigma_{n^2} h_n(x)$ el polinomio de Fejer de orden n^2 asociado a h_n . Es decir:

$$P_n(x) = \sum_{-n^2}^{n^2} \left(1 - \frac{|k|}{n^2 + 1}\right) \widehat{h}_n(k) e^{2\pi i k x}$$

Tenemos que:

$$S_n P_n(x) = \sum_{-n}^n \widehat{P}_n(k) e^{2\pi i k x} = \sum_{-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n^2 + 1}\right) \widehat{h}_n(k) e^{2\pi i k x}$$

y

$$S_n P_n(x) - S_n h_n(x) = - \sum_{-n}^n \frac{|k|}{n^2 + 1} \widehat{h}_n(k) e^{2\pi i k x}$$

Luego:

$$|S_n P_n(0) - S_n h_n(0)| \leq \sum_{-n}^n \frac{|k|}{n^2 + 1} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Por otro lado, el teorema de Fejer nos asegura que:

$$\|P_n\|_{\infty} = \|\sigma_{n^2} h_n(x)\|_{\infty} \leq \|h_n\|_{\infty} = 1.$$

Resumiendo: Para cada $n \in \mathbb{N}$ hemos construido un polinomio trigonométrico $P_n(x) = \sigma_{n^2} h_n(x)$ de grado n^2 de manera que:

1. $|P_n(x)| \leq 1$ para todo x .
2. $|S_n P_n(0)| \geq \frac{4}{n^2} \log(2n + 1) - \frac{1}{2}$

Finalmente construiremos la función continua $f(x)$ "pegando" estos polinomios. Antes, sin embargo, conviene modificarlos de manera que las frecuencias de los polinomios resultantes estén contenidas en regiones disjuntas:

Consideremos los números $\nu(n) = 2^{3^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ y definamos la función:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} P_{\nu(k)}(\nu(k)x)$$

Es claro que la serie converge uniformemente y f es, por tanto, una función continua. Observemos que el polinomio trigonométrico $P_{\nu(k)}(\nu(k)x)$ sólo contiene términos de la forma $a_m^k e^{2\pi i m x}$ donde $m = 0$ o $\nu(k) \leq |m| < \nu(k)^3$ y que $\nu(k)^3 = (2^{3^k})^3 = \nu(k+1)$.

Luego:

$$\begin{aligned} S_{\nu^2(n)} f(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} P_{\nu(k)}(\nu(k)x) + \frac{1}{n^2} S_{\nu^2(n)} \left(P_{\nu(k)}(\nu(n)x) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} P_{\nu(k)}(\nu(k)x) + \frac{1}{n^2} (S_{\nu(n)} P_{\nu(n)})(\nu(n)x) \end{aligned}$$

Tomando $x = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} |S_{v^2(n)}f(0)| &\geq \frac{1}{n^2} |S_{v(n)}P_{v(n)}(0)| - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{n^2} \left(\frac{4}{\pi^2} \log(2 \cdot 2^{3^n} + 1) - \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} |S_n f(0)| = \infty$$

H.A.N.V.

La primera parte de la demostración, esto es, la construcción de los polinomios P_n es bastante natural y sencilla. La astucia de "trasladar" las frecuencias de los polinomios de manera que las nuevas vivan en intervalos "diádicos" disjuntos puede, en un principio, parecer un artefacto demasiado "ad hoc" para el caso que nos ocupa. No obstante es un recurso habitual en las series trigonométricas y, en otras muchas ocasiones, se utiliza para explotar las propiedades de casi independencia estocástica de las funciones cuyo espectro de Fourier está localizado en intervalos diádicos disjuntos. Por lo demás, existe una versión más general y abstracta del fenómeno que hemos analizado, que es conocida como principio de la condensación de las singularidades ó de Banach-Steinhaus en el Análisis Funcional:

Consideremos el espacio $C(\mathbb{T})$ con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{T}} |g(x)|$ que le confiere una topología de espacio normado completo (espacio de Banach).

Los operadores:

$$\begin{aligned} T_n : C(\mathbb{T}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ T_n f &\longrightarrow S_n f(0) = D_N * f(0) \end{aligned}$$

son lineales y continuos.

Por lo visto anteriormente

$$|T_N P_N| \geq \frac{4}{\pi^2} \log(2N + 1) - \frac{1}{2} \text{ y } \|P_N\|_\infty \leq 1.$$

Sus normas, como operadores, no están uniformemente acotadas. El teorema de Banach-Steinhaus nos dice que: ora los operadores están uniformemente acotados, ora existe $f \in C(\mathbb{T})$ de manera que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |T_N f| = \infty.$$

Pero es exactamente lo que hemos probado antes con una construcción directa de f .

6.5. Convergencia puntual: el estado del arte.

En el año 1926 Kolmogorov demostró la existencia de funciones integrables cuya serie de Fourier diverge en casi todos los puntos. Sin embargo, Lennart Carleson, en 1964, probó que si $f \in L^2(\mathbb{T})$ (en particular, si $f \in C(\mathbb{T})$) su serie de Fourier converge en casi todo punto x al valor $f(x)$ (R. Hunt extendió el resultado de Carleson a funciones de $L^p(\mathbb{T})$, $p > 1$). El teorema de Carleson publicado en *Acta Mathematica* 116 (1966), "**On convergence and growth of partial sums of Fourier series**", es uno de los trabajos más duros y quizás profundos, de la Matemática de ese siglo. Existe otra demostración distinta debida a C. Fefferman pero aún no tenemos, creo yo, la versión que permita entender con mayor transparencia lo que realmente ocurre con $S_n f(x)$ y el porqué de las diferencias entre L^1 y L^p , $p > 1$. En otra dirección podemos reseñar el resultado de Kahane y Katznelson: si $E \subset \mathbb{T}$ es un conjunto de medida cero, entonces existe una función continua $f \in C(\mathbb{T})$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n f(x)| = \infty$$

para todo $x \in E$.

Capítulo 7

Algunas aplicaciones de las series de Fourier.

7.1. Una función continua que carece de derivada en todos los puntos.

Resulta fácil exhibir funciones continuas que no son derivables en algunos puntos, tales como $f(x) = |x|$, sin embargo el primer ejemplo conocido de una que no lo es en ningún punto se debe a Weierstrass, quien usó las series trigonométricas:

Sea $W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} \cos(2\pi 5^{2k} x)$, entonces:

Proposición 3. - $W(x)$ carece de derivada en todos los puntos $x \in [0, 1]$.

Demostración: Fijado el punto x construiremos una sucesión decreciente de números reales h_n de manera que los cocientes incrementales verifiquen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{W(x + h_n) - W(x)}{h_n} \right| = \infty.$$

Para verlo consideremos los incrementos

$$\begin{aligned} W(x + \Delta x) - W(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{5^k} \left(\cos(2\pi 5^{2k}(x + \Delta x)) - \cos(2\pi 5^{2k} x) \right) \\ &\quad + \frac{1}{5^n} \left(\cos(2\pi 5^{2n}(x + \Delta x)) - \cos(2\pi 5^{2n} x) \right) + \\ &\quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{5^k} \left(\cos(2\pi 5^{2k}(x + \Delta x)) - \cos(2\pi 5^{2k} x) \right) = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Observemos que:

$$|I_1| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{5^k} 2\pi 5^{2k} |\Delta x| \leq 2\pi |\Delta x| \frac{5^n}{4} = \frac{\pi}{2} 5^n |\Delta x|$$

$$|I_3| \leq 2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{5^k} \leq \frac{1}{2} 5^{-n}$$

Escojamos ahora $h_n = \Delta x$ de manera que:

1. $2\pi 5^{2n} |\Delta x| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |h_n| = \frac{1}{4} 5^{-2n}$
2. El signo de $h_n = \pm \frac{1}{4} 5^{-2n}$ lo elegimos de forma que

$$\begin{aligned} & \left| \cos\left(2\pi 5^{2n} x + \text{sign}(h_n) \frac{\pi}{2}\right) - \cos(2\pi 5^{2n} x) \right| = \\ & = |\sin(2\pi 5^{2n} x)| + |\cos(2\pi 5^{2n} x)| \geq 1 \end{aligned}$$

es decir, $h_n = -\text{sign}(\cos(2\pi 5^{2n} x)) \cdot \frac{1}{4} 5^{-2n}$.

De esta manera obtenemos que:

$$|I_2| = \frac{1}{5^n} (|\sin(2\pi 5^{2n} x)| + |\cos(2\pi 5^{2n} x)|) \geq \frac{1}{5^n}$$

y

$$|W(x + h_n) - W(x)| \geq |I_2| - |I_3| - |I_1| \geq \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) 5^{-n} = \frac{4 - \pi}{8} 5^{-n} \geq \frac{C}{4} 5^{-n}$$

Luego:

$$\frac{|W(x + h_n) - W(x)|}{h_n} \geq C \cdot 5^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

H.A.N.V.

Nota.- Obsérvese que la construcción anterior prueba algo más: si $\alpha > \frac{1}{2}$, entonces, $W(x) \notin \Lambda^\alpha(T)$.

Por otro lado, no es difícil demostrar que $W \in \Lambda^{1/2}(T)$:

$$\begin{aligned} |W(x) - W(y)| & \leq \left| \sum_{k=1}^M \frac{1}{5^k} (\sin(2\pi 5^{2k} x) - \sin(2\pi 5^{2k} y)) \right| + \\ & + \left| \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{5^k} (\sin(2\pi 5^{2k} x) - \sin(2\pi 5^{2k} y)) \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^M \frac{1}{5^k} 2\pi 5^{2k} |x - y| + 2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{5^k} \leq \\ & \leq \frac{5\pi}{4} 5^M |x - y| + \frac{1}{2} \frac{1}{5^M} \end{aligned}$$

Si tomamos $5^M \approx \sqrt{|x - y|}$, es decir, $-M \log(5) \approx \frac{1}{2} \log|x - y|$; o bien $M = \left\lceil \frac{\log|x - y|}{2 \log 5} \right\rceil$, entonces, obtenemos la estimación:

$$|W(x) - W(y)| \leq C \sqrt{|x - y|}$$

Luego, $W \in \Lambda^{1/2}(T)$.

La elección del número 5 en la construcción anterior es arbitraria y ha sido una elección cómoda. Se sugiere como ejercicio el estudiar las funciones:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \cos(b^n x)$$

donde $0 < a \leq b$ son enteros arbitrarios.

La gráfica de $W(x)$ es un “fractal”:

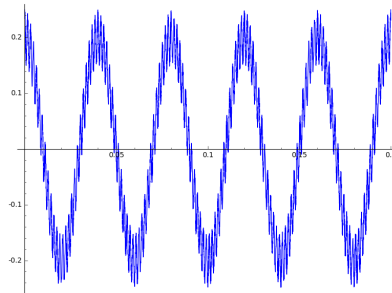


Figura 7.1.

7.2. El problema de los isoperímetros: Funciones de variación acotada.

Según la mitología, la fundación de la ciudad de Cartago fue llevada a cabo por la reina Dido (o Elisa) que emigro de su Tiro natal seguida de muchos tiros, algún troyano y cuantiosas riquezas. Después de recalar en Chipre, donde se le unió el gran sacerdote de Júpiter junto a su séquito de numerosas doncellas chipriotas, desembarcó en el norte de África, no lejos de la colonia fenicia de Utica. Allí compró al rey de Jarbas una extensión de terreno que no fuese mayor que la ocupada por una piel de toro, por lo que los tirios acudieron a la estratagema de cortar la piel en tiras haciéndose dueños de la extensión de tierra por ellas cercada.

Pero, ¿Cuál es la extensión mayor de terreno que puede ser limitada por la cuerda extraída de la piel de toro? En otros términos más geométricos: ¿de entre todas las figuras de perímetro dado cuál es la de mayor área?

A principios del siglo XIX, Jacob Steiner, a la sazón profesor de Geometría en la universidad de Berlín, encontró diversos argumentos ingeniosos para demostrar que la respuesta a la pregunta anterior es el círculo. Veamos uno de ellos:

Demostración: Supongamos que Ω es una solución al problema.

1. Convexidad.- Ω ha de ser un dominio convexo.

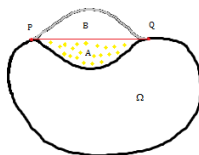


Figura 7.2.

En caso contrario podemos encontrar dos puntos P y Q en la frontera $\partial\Omega$, de manera que el conjunto está contenido en uno de los semiplanos limitado por la recta PQ mientras que el segmento abierto (P, Q) está fuera de Ω . Si reflejamos respecto a la recta PQ la región A , delimitada por PQ y $\partial\Omega$, obtenemos un nuevo conjunto $\Omega' = \Omega \cup A \cup B$ que es de área mayor que Ω , pero cuya frontera $\partial\Omega'$ tiene la misma longitud que la de Ω .

2. Supongamos pues, sin pérdida de generalidad que Ω es convexo.

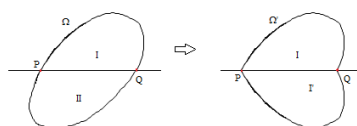


Figura 7.3.

Sean P y Q dos puntos de la frontera que dividen a esta en dos áreas de igual longitud. Consideremos las dos regiones I y II en que el diámetro PQ divide a Ω , tenemos que el área de I es igual al área de II . Puesto que en caso contrario, por ejemplo, si el área de I es mayor al área de II , entonces, el nuevo conjunto Ω' formado por I y I' , la reflexión de I a través de la recta PQ , tendría igual perímetro que Ω pero área estrictamente mayor, en contra de la definición inicial de que Ω es el dominio de máxima área con perímetro fijado.

El problema de Dido es, por tanto, equivalente a este otro: de entre todas las regiones contenidas en un semiplano y cuya frontera consta de una curva de longitud fijada y de un trazo de frontera del semiplano, aquella de área máxima es el semicírculo.

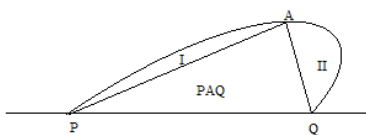


Figura 7.4.

Sea, pues, D un dominio que resuelve el problema anterior, esto es, mitad de Ω , tenemos que demostrar que se trata de un semicírculo. Sea A un punto cualquiera de la frontera y consideremos el ángulo en A , \widehat{PAQ} , el triángulo PAQ y los sectores I y II en que separan, respectivamente, los segmentos PA y QA el dominio D .

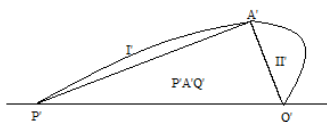


Figura 7.5.

Tenemos que $\widehat{PA'Q}$ es un ángulo recto, puesto que, en caso contrario, la figura formada por el triángulo rectángulo $P'A'Q'$ con lados $P'A'$ y $A'Q'$ de iguales longitudes a PA y AQ respectivamente y sectores I' y II' dados por un movimiento rígido sobre I y II tiene área mayor y el mismo perímetro.

Luego, cualquiera que sea A , el ángulo \widehat{PAQ} es recto, propiedad que caracteriza al semicírculo.

H.A.N.V.

A primera vista el argumento parece impecable, pero, sin embargo, tiene una objeción seria: la hipótesis de que tal dominio existe. En realidad, lo que Steiner probó es que, si el problema de Dido tiene solución, esta ha de ser un círculo. Pero, en principio, no podemos asegurar de bóbilis, bóbilis, que tal solución exista. Piénsese, por ejemplo, en la existencia o no del número racional más pequeño entre los que son mayores que $\sqrt{2}$...

No obstante la demostración de Steiner puede completarse de la manera siguiente:

1. la longitud de una curva es el límite de las longitudes de las poligonales inscritas, cuando la longitud de sus lados tiende a cero;
2. el argumento de Steiner permite demostrar que entre todos los polígonos de n lados e igual perímetro, el de área máxima es el polígono regular;

3. las áreas de los polígonos regulares de n lados y perímetro fijo L , $A_n = \frac{1}{4}L^2 (\pi \tan(\pi/n))^{-1}$, constituyen una sucesión creciente cuyo límite es el área del círculo.

Dejamos al lector interesado la realización de este ejercicio. A continuación vamos a presentar otra demostración que usa las series trigonométricas para obtener una de las desigualdades básicas del análisis trigonométrico: la desigualdad isoperimétrica.

Teorema 15. *Desigualdad isoperimétrica.* - Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, tenemos que:

$$\text{area}(\Omega) \leq \frac{1}{4\pi} \text{long}^2(\partial\Omega)$$

Además, la igualdad se alcanza si y solo si Ω es un círculo.

Demostración: La haremos pensando $\partial\Omega$ como una curva continua y lisa a trozos. El caso general se obtiene por paso al límite, habida cuenta de la definición de longitud (o perímetro). No hay pérdida de generalidad en suponer que la longitud de $\partial\Omega$ es 1, ya que una sencilla dilatación (homotecia) nos permite siempre hacer esta normalización.

Sea $(x(s), y(s))$ con $s \in [0, 1]$ la parametrización de la curva $\partial\Omega$ respecto a la longitud de arco. Sabemos, entonces, que

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$$

para todo $s \in [0, 1]$, excepto, quizás, por un número finito de puntos donde $\partial\Omega$ tiene sus esquinas.

La fórmula de Green

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega, \quad \omega = A dx + B dy$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} A dx + B dy$$

nos da, tomando $B(x, y) = x$ y $A(x, y) = -y$:

$$2 \cdot \text{area}(\Omega) = \int_0^1 (-y(s)x'(s) + x(s)y'(s)) ds$$

Sean

$$\begin{cases} x(s) \sim \sum \hat{x}(k)e^{2\pi i k s} \\ y(s) \sim \sum \hat{y}(k)e^{2\pi i k s} \end{cases}$$

las series trigonométricas respectivas de x y de y , claramente:

$$\hat{x}(-k) = \int_0^1 x(s)e^{2\pi i k s} ds = \overline{\hat{x}(k)}$$

y equivalente para $\hat{y}(k)$. Además, las series son convergentes puntualmente puesto que $x(s)$ y $y(s)$ son funciones lipschitz.

Tenemos como primera estimación:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{area}(\Omega) &= \int_0^1 (x(s)y'(s) - y(s)x'(s)) \, ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(k)\hat{y}'(-k) - \hat{y}(k)\hat{x}'(-k) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi i k \hat{x}(k)\hat{y}(-k) - 2\pi i k \hat{y}(k)\hat{x}(-k) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi i k (\hat{x}(k)\overline{\hat{y}(k)} - \hat{y}(k)\overline{\hat{x}(k)}) = 2\pi i \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} -k \cdot 2i \text{Im}(\hat{x}(k)\overline{\hat{y}(k)}) = \\ &= 8\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \text{Im}(\hat{x}(k)\overline{\hat{y}(k)}) \leq 8\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} (|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2) \end{aligned}$$

Por otro lado, la identidad $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$, junto a la identidad de Bessel, produce la segunda estimación:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 (x'(s)^2 + y'(s)^2) \, ds = 4\pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 (|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2) = \\ &= 8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2) \end{aligned}$$

Comparando ambas estimaciones obtenemos que:

$$\begin{aligned} \text{area}(\Omega) &\leq 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} k (|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2) \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} 8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k (|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2) \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \cdot 8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k (|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2) = \frac{1}{4\pi} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Claramente la igualdad $\text{area}(\Omega) = \frac{1}{4\pi}$, implica la identidad en cada una de las desigualdades anteriores. En particular, la penúltima de ellas exige que $\hat{x}(k) = \hat{y}(k) = 0$ si $k \geq 2$. Luego, en ese caso resulta que:

$$\begin{cases} x(s) = a_0 + a_1 e^{2\pi i s} + \overline{a_1} e^{-2\pi i s} \\ y(s) = b_0 + b_1 e^{2\pi i s} + \overline{b_1} e^{-2\pi i s} \end{cases}$$

Además tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \text{area}(\Omega) &= 4\pi \text{Im}(a_1 \overline{b_1}) = \frac{1}{4\pi} \\ 1 &= 8\pi^2 (|a_1|^2 + |b_1|^2) \end{aligned} \right\}$$

De donde se deduce que $|a_1| = |b_1| = \frac{1}{4\pi}$.

$$a_1 = \frac{1}{4\pi} e^{2\pi i \varphi}, \quad b_1 = \frac{1}{4\pi} e^{2\pi i(\varphi + \pi/4)} = i \cdot a_1$$

Luego:

$$\begin{cases} x(s) = a_0 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi(s + \varphi)) \\ y(s) = b_0 + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi(s + \varphi)) \end{cases}$$

que son las ecuaciones de la circunferencia centrada en (a_0, b_0) y radio $\frac{1}{2\pi}$.

H.A.N.V.

En dimensiones mayores existe también una desigualdad isoperimétrica: entre todos los compactos de superficie prefijada, aquel de mayor volumen es la esfera. La demostración del resultado n -dimensional exige técnicas distintas.

Funciones de variación acotada.- En la discusión anterior ha quedado pendiente, en realidad, caracterizar las curvas de longitud finita que son muchas más que las diferenciables a trozos. Ese empeño nos conduce a las funciones de variación acotada:

Definición 11. Una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es de variación acotada si

$$V(f) = \sup_{\mathfrak{P}} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| < \infty$$

donde el supremo esta tomado sobre todas las particiones

$$\mathfrak{P} = \{(t_0, \dots, t_n) : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1\}, \text{ del intervalo } [0, 1]$$

En general a una función de variación acotada no le exigiremos la continuidad, sin embargo, el siguiente ejercicio prueba que sus discontinuidades están controladas en cierta medida:

1. Si f es de variación acotada, entonces, sus discontinuidades son de tipo salto, esto es, existen $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$.
2. Además, el conjunto de discontinuidades $\{a_j\}$ es, a lo sumo, numerable y los saltos verifican que:

$$\sum_j |f(a_j^+) - f(a_j^-)| < \infty$$

Luego, si consideramos la función

$$h(t) = \sum_j \left(f(a_j^+) - f(a_j^-) \right) \cdot H_{a_j}(t)$$

donde $H_z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < z \\ 1 & \text{si } t \geq z \end{cases}$ resulta que $g(t) = f(t) - h(t)$ es también de variación acotada y continua.

Dada una función f de variación acotada podemos definir la función

$$V(x) = \sup_{\mathfrak{P}[0,x]} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$$

donde el supremo ahora es considerado sobre todas las particiones \mathfrak{P} del intervalo $[0, x]$.

De la definición anterior se deduce que $V(x)$ es una función creciente: $V(f) = V(1)$.

Los aficionados al álgebra lineal pueden comprobar que el espacio de las funciones de variación acotada, BV , dotado de la norma

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_{\infty} + V(f)$$

es también un espacio normado completo.

Ejemplos.-

1. Si f es continua con derivada integrable f' , entonces:

$$\begin{aligned} V(f) &= \sup_{\mathfrak{P}} \sum |f(t_{j+1}) - f(t_j)| = \sup_{\mathfrak{P}} \sum \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(t) dt \right| \leq \\ & \sup_{\mathfrak{P}} \sum \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(t)| dt = \|f'\|_1 \end{aligned}$$

2. Si f es monótona (creciente o decreciente)

$$V(f) = |f(1) - f(0)|$$

Este último ejemplo es paradigmático y tiene un recíproco: toda función de variación acotada es la diferencia de dos funciones monótonas.

$$f(x) = V(x) - (V(x) - f(x))$$

Como ya sabemos que V es monótona creciente, basta con observar que si $x < y$ entonces:

$$V(y) - V(x) \geq |f(y) - f(x)|$$

Luego $V(y) - f(y) \geq V(x) - f(x) + |f(y) - f(x)| + f(x) - f(y) \geq V(x) - f(x)$, es decir, $V(x) - f(x)$ también es monótona creciente. (El lector habrá ya encontrado la similitud con las funciones de distribución del cálculo de probabilidades).

No hay por tanto pérdida de generalidad si nos restringimos a las funciones del espacio BV que son monótonas crecientes. A una tal función f le podemos asociar una medida de Lebesgue-Stieltjes df por medio de la fórmula

$$df[a, b] = f(b) - f(a)$$

Tenemos que:

$$\left| \int_0^1 e^{-2\pi i n x} df(x) \right| \leq V(f)$$

Luego integrando por partes obtenemos que, para $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &= \left| \int_0^1 e^{-2\pi i k t} f(t) dt \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi|k|} \left| \int_0^1 f(t) de^{-2\pi i k t} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi|k|} \left(|f(1) - f(0)| + \left| \int_0^1 e^{-2\pi i k t} df(t) \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{2V(f)}{2\pi|k|} = \frac{V(f)}{\pi|k|} \end{aligned}$$

Capítulo 8

La Integral de Fourier.

En la primera parte de este curso hemos considerado el análisis armónico de las funciones periódicas. Nuestro propósito ahora es tratar de adaptar el método al caso de las funciones no periódicas. De manera ingenua podemos considerar a una función general $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función periódica de periodo infinito (?).

La familia de funciones $\{e^{2\pi i(n/T)x}\}_{n=0,\pm 1,\pm 2,\dots}$ constituye un sistema ortogonal completo en el espacio $L^2(-T/2, T/2)$:

$$\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi i \frac{n}{T} t} f(t) dt$$
$$f(x) \sim \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi i \frac{n}{T} x}$$

Si en la primera relación tomamos $\xi = n/T$ y hacemos tender T a infinito obtenemos formalmente:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi t} f(t) dt$$

Mientras que la segunda puede ser considerada como una suma de Riemann de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = f(x)$$

Es decir, de manera heurística tenemos que:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi t} f(t) dt$$
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi x} \hat{f}(\xi) d\xi$$

que son fórmulas (de la transformada de Fourier y de su inversa) que aparecen en el tratado "*Theorie analytique du chaleur*" que mencionamos al comienzo del curso. Nuestro propósito más inmediato consiste en entender y dar sentido a las fórmulas anteriores. Conceptualmente no hay ninguna dificultad en hacer el análisis en \mathbb{R}^n (al menos al principio) por lo que consideraremos el caso general.

Notación: Dados dos puntos $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, su producto escalar es $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. La medida de Lebesgue $dx = dx_1 \cdots dx_n$ y la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Un multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un elemento de \mathbb{Z}_+^n , es decir, cada componente α_j es un entero no negativo. $|\alpha| = \sum_j \alpha_j$, $\alpha! = \prod_j \alpha_j!$, $x^\alpha = \prod_j x_j^{\alpha_j}$, $D_x^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{a_1} x_1 \cdots \partial^{a_n} x_n} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} f$.

De manera que con esta notación de multiíndices la serie de Taylor de una función de clase C^∞ alrededor de un punto x_0 se escribe:

$$f(x) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha f(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha$$

Con el convenio de que si $\alpha = (0, \dots, 0)$ entonces $D_x^\alpha f = f$.

Definición 12. Dada una función f integrable en \mathbb{R}^n ($f \in L^1(\mathbb{R}^n)$) su **transformada de Fourier** \hat{f} es también una función de \mathbb{R}^n obtenida por medio de la fórmula:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx.$$

La hipótesis acerca de que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ en la fórmula anterior nos asegura que la integral converge absolutamente:

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

En otras palabras: $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

8.1. Los espacios de funciones.

En analogía con el caso periódico, consideraremos en principio dos familias de espacios funcionales, a saber: 1) los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, de Lebesgue que determinan el tamaño de sus funciones en términos de la medida de Lebesgue y 2) los espacios $C_0^k(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq k \leq \infty$, de las funciones diferenciables con soporte compacto, que son adecuados para expresar la lisura de las funciones. A estos les añadiremos otros tales como $S(\mathbb{R}^n)$ (el espacio de las funciones lisas de decrecimiento rápido); $\Lambda^\alpha(\mathbb{R}^n)$ de las funciones Lipschitzianas; los espacios de Sobolev, espacios de Hardy, etc... que definiremos más adelante.

8.1.1. Espacios L^p .

La teoría de $L^p(\mathbb{R}^n)$ es bastante similar al caso $L^p[0,1]$ aunque presenta ciertas diferencias debido a la no compacidad de \mathbb{R}^n . Recordemos que en teoría de la medida consideramos dos funciones equivalentes si difieren tan sólo en un conjunto de medida cero. Los elementos de $L^p(\mathbb{R}^n)$ son clases de equivalencia de funciones medibles f tales que

$$\|f\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} < \infty, \text{ si } 1 \leq p < \infty,$$

ó bien

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{esencial de } |f(x)| < \infty.$$

Los resultados básicos son los mismos del caso $L^p[0,1]$ vistos en los primeros capítulos:

Desigualdad de Hölder:

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int |g(x)|^q dx \right)^{1/q},$$

si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p \leq \infty$.

Desigualdad de Minkowski:

Dadas $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Desigualdad Integral de Minkowski:

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy \right|^p dx \right]^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|^p dx \right]^{1/p} dy.$$

Completitud.

$L^p(\mathbb{R}^n)$ es un espacio métrico completo con respecto a la distancia $d(f, g) = \|f - g\|_p$.

Traslaciones.

Si $1 \leq p < \infty$ entonces las traslaciones son operaciones continuas en la métrica L^p . Es decir:

Dado $a \in \mathbb{R}^n$ definimos $\delta_a f$ por medio de la fórmula $\delta_a f(x) = f(x - a)$. Tenemos que: $\lim_{a \rightarrow 0} \|\delta_a f - f\|_p = 0$ para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

De igual manera que en el caso periódico podemos definir el módulo de continuidad integral:

$$\omega_\gamma(f) = \sup_{\|a\| \leq \gamma} \|\delta_a f - f\|_p.$$

La afirmación anterior se escribe entonces de la forma:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \omega_\gamma(f) = 0.$$

El caso $p = \infty$ está excluido porque el resultado es falso. Para estos menesteres el espacio L^∞ debe ser sustituido por $C_0(\mathbb{R}^n)$, como también hicimos en el caso periódico.

Convolución.

Dadas dos funciones $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ su convolución

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

es una función del espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ y verifica la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|^p dx \right]^{1/p} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right|^p dx \right]^{1/p} \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^p dx \right]^{1/p} dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dx \right)^{1/p} dy = \\ &= \|g\|_1 \cdot \|f\|_p. \end{aligned}$$

Además: $f * g = g * f$ y $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Las pruebas de todos estos hechos son idénticas a las que obtuvimos en el caso periódico y, por tanto, se dejan como ejercicio al lector. Una diferencia ostensible entre los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^p(\mathbb{T})$ es la siguiente:

1. En el caso compacto $L^{p_1}[0, 1] \supsetneq L^{p_2}[0, 1]$ siempre que $p_1 < p_2$. En particular $L^\infty[0, 1] \subset L^p[0, 1] \subset L^1[0, 1]$, $1 < p < \infty$.
2. En el caso no compacto si $p_1 \neq p_2$ entonces $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \not\subset L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ y $L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \not\subset L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$. Ningún L^p está contenido en otro distinto.

Ejemplos:

Sean $f_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ si $|x| \leq 1$ y $f_\alpha(x) = 0$ si $|x| > 1$, con $\alpha \geq 0$. $g_\beta(x) = 0$ si $|x| \leq 1$ y $g_\beta(x) = \frac{1}{|x|^\beta}$ si $|x| > 1$, con $\beta \geq 0$.

Entonces, $f_\alpha \in L^p(\mathbb{R})$ si y sólo si $p < 1/\alpha$. $g_\beta \in L^p(\mathbb{R})$ si y sólo si $p > 1/\beta$.

Dados $p_1 < p_2$ podemos encontrar α de manera que:

$$p_1 < 1/\alpha < p_2.$$

Por lo tanto:

$$f_\alpha \in L^{p_1}(\mathbb{R}), f_\alpha \notin L^{p_2}(\mathbb{R}).$$

$$g_\alpha \notin L^{p_1}(\mathbb{R}), g_\alpha \in L^{p_2}(\mathbb{R}).$$

Ejercicio: Supongamos que f, g son funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$ con soportes compactos. Es decir, existen dos compactos K_1, K_2 tales que $f|_{(\mathbb{R}^n - K_1)} \equiv 0$ y $g|_{(\mathbb{R}^n - K_2)} \equiv 0$. Comprobar que $f * g$ se anula fuera del compacto $K_1 + K_2 = \{x + y | x \in K_1, y \in K_2\}$. Concluir pues la relación siguiente:

$$\text{sop}(f * g) \subset \text{sop}(f) + \text{sop}(g).$$

8.1.2. Funciones Lisas.

Un ejemplo interesante de función lisa con soporte compacto es el siguiente: Sea $\tilde{\varphi}(x) = 0$ si $\|x\| \geq 1$ y $\tilde{\varphi}(x) = e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}$ si $\|x\| < 1$. Sea:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\int \tilde{\varphi}(y) dy} \cdot \tilde{\varphi}(x)$$

Tenemos que:

1. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$.
2. $\text{sop}(\varphi) = B(0;1)$.
3. $\int \varphi(x) dx = 1$.

De manera análoga a lo que hicimos en los primeros capítulos, consideremos la familia de dilataciones dado $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon(x) &= \epsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \\ \text{sop} \varphi_\epsilon &\subset B(0;\epsilon) \\ \int \varphi_\epsilon(x) dx &= 1 \end{aligned}$$

Esta función y la operación de convolución nos permite obtener otras funciones lisas de soporte compacto.

Proposición 4. Sea K un compacto de \mathbb{R}^n que está contenido en un abierto U , entonces existe una función $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (funciones C^∞ + soporte compacto) tal que:

1. $\text{sop}(f) \subset U$ ($\equiv f \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n - U$).
2. $f \equiv 1$ en K .

Demostración:

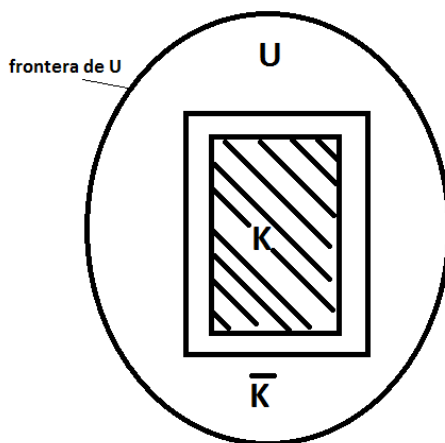


Figura 8.1.

Como K es compacto, necesariamente existe un δ positivo de manera que

$$\text{dist}(K, \partial U) = \min_{x \in K, y \in \partial U} d(x, y) \geq 2\delta > 0.$$

Sea $\bar{K} = \{x : d(x, K) \leq \delta\}$, entonces \bar{K} es también un compacto que verifica $K \subset \bar{K} \subset U$, $\text{dist}(\bar{K}, \partial U) \geq \delta$.

Consideramos $g(x)$ la función indicadora de \bar{K} , es decir, que toma el valor 1 si $x \in \bar{K}$ y 0 en el resto de sitios. Con la notación del párrafo anterior, sea $f_\epsilon(x) = \varphi_\epsilon * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(x-y)g(y)dy$. Entonces:

1. $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f_\epsilon(x) = D\varphi_\epsilon * g(x)$, $\forall \alpha$.
2. Si $\epsilon < \delta$ se verifica que:
 - a) Para todo $x \in K$, $f_\epsilon(x) = \int \varphi_\epsilon(x-y)g(y)dy = \int \varphi_\epsilon(x-y)dy = 1$ ya que si $x \in K$ tenemos que $\varphi_\epsilon(x-y)g(y) = \varphi_\epsilon(x-y)$ debido a que $\epsilon < \delta$ y si $\varphi_\epsilon(x-y) \neq 0$ entonces $\text{dist}(x, y) \leq \epsilon \Rightarrow y \in K \subset \bar{K} \Rightarrow g(y) = 1$.
 - b) Si $x \notin U$ entonces $\varphi_\epsilon(x-y)g(y) \equiv 0 \forall y$. Luego $f_\epsilon = 0$.

H.A.N.V.

Por lo tanto el espacio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, que también se designa por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y que consta de las funciones de clase C^∞ con soporte compacto, contiene a una rica variedad de funciones. Desde el punto de vista de la transformada de Fourier tiene el inconveniente de no ser cerrado: la transformada de Fourier de una función de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ no está en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (a menos que sea idénticamente nula, claro) como veremos más adelante.

Por otro lado, las funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pueden ser muy malas por crecer demasiado deprisa. Piénsese, por ejemplo, en $\exp(\pi\|x\|^2) = e^{\pi\|x\|^2}$ ó en $e^{e^{x^2}}$ y trátase de dar sentido a la integral de Fourier... Un espacio intermedio es el introducido por Laurent Schwartz y denominado espacio $S(\mathbb{R}^n)$ de las funciones lisas con decrecimiento rápido:

Definición 13. Espacio $S(\mathbb{R}^n)$. Una función f de clase C^∞ pertenece al espacio $S(\mathbb{R}^n)$ si ella y todas sus derivadas, $D^\alpha f$, decrecen más rápidamente que el inverso de cualquier polinomio, cuando $|x| \rightarrow \infty$.

En otras palabras:

Dados dos multiíndices α y β con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ definimos:

$$P_{\alpha,\beta}(f) = \sup_x |x^\beta D^\alpha f(x)|$$

Entonces:

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : P_{\alpha,\beta}(f) < \infty, \forall \alpha, \beta\}.$$

Es claro que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ siendo los contenidos en sentido estricto. Un ejemplo de una función de $S(\mathbb{R}^n)$ que no está en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es la exponencial:

$$e^{-\pi\|x\|^2}.$$

El espacio $S(\mathbb{R}^n)$ tiene una estructura lineal obvia: la suma de dos funciones de $S(\mathbb{R}^n)$ está también allí, así como el producto de una función de $S(\mathbb{R}^n)$ por un escalar. Cada uno de los $P_{\alpha,\beta}$ es una norma en $S(\mathbb{R}^n)$:

- $P_{\alpha,\beta}(f + g) \leq P_{\alpha,\beta}(f) + P_{\alpha,\beta}(g)$.
- $P_{\alpha,\beta}(\lambda f) = |\lambda| P_{\alpha,\beta}(f)$.

Además, es claro que si $P_{\alpha,\beta}(f) = 0$, $\forall \alpha, \beta$ entonces $f = 0$.

Con estas normas podemos definir una topología en $S(\mathbb{R}^n)$ de la manera siguiente:

Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $S(\mathbb{R}^n)$ converge a $f \in S(\mathbb{R}^n)$ si se verifica que: $P_{\alpha,\beta}(f - f_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, para todo par de multiíndices α, β .

(En particular tomando $\beta = 0$ vemos que la convergencia anterior implica la convergencia uniforme de todas las sucesiones $\{D^\alpha f_n\}_{n=1,2,\dots}$).

Como ejercicio sencillo de topología general puede verse que la definición anterior es equivalente a la convergencia respecto a la siguiente distancia:

$$d(f, g) = \sum_{\alpha,\beta} 2^{-(|\alpha|+|\beta|)} \frac{P_{\alpha,\beta}(f - g)}{1 + P_{\alpha,\beta}(f - g)}$$

Es decir, ejercicio:

1. Probar que d es una distancia en $S(\mathbb{R}^n)$.

2. Probar que $P_{\alpha,\beta}(f - f_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\forall \alpha, \beta$ si y sólo si $d(f, f_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.
3. Probar que $S(\mathbb{R}^n)$ con la anterior distancia es un espacio métrico completo.
4. Dados multiíndices α y β , las operaciones:
 - $f \rightarrow D^\alpha f$.
 - $f \rightarrow x^\beta f$.

son lineales y continuas en $S(\mathbb{R}^n)$.

5. Comprobar la inclusión $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

8.2. Aproximaciones de la identidad (núcleos de su-mabilidad).

De nuevo y de manera análoga a lo que hicimos en el caso periódico, una aproximación de la identidad es una familia de núcleos (funciones) K_N tales que:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} K_N(x) dx = 1$, $\forall N$.
2. $\int_{\mathbb{R}^n} |K_N(x)| \leq C < \infty$, $\forall N$.
3. $\forall \delta > 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} |K_N(x)| dx = 0$.

Ejemplos:

- $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ donde φ es la función definida anteriormente y $N = \frac{1}{\epsilon}$.
- $\epsilon^{-n/2} e^{-\pi \frac{\|x\|^2}{\epsilon}}$, $\epsilon > 0$, que es el núcleo de Gauss.

Teorema 16. Féjer. *Sea $\{K_N\}$ una aproximación de la identidad. Tenemos que:*

1. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, entonces la sucesión $f_N = f * K_N$ converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es continua en el punto x_0 , entonces $f_N(x_0)$ converge a $f(x_0)$ cuando $N \rightarrow \infty$. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es continua en un compacto K , entonces la convergencia de $f_N(x)$ a $f(x)$ es uniforme en K .

Demostración: Se deja como ejercicio ya que es idéntica a la del caso periódico.

H.A.N.V.

8.3. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LAS FUNCIONES DE $S(\mathbb{R}^N)$. 99

Corolario 16.1. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

Demostración: Se basa en el teorema de Féjer junto a las operaciones de truncación y regularización:

Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y dado $\eta > 0$ podemos encontrar $R < \infty$ de manera que si definimos la truncación como $f^R(x) = f(x)$ si $|x| < R$ y $f^R(x) = 0$ si $|x| \geq R$, resulta que $\|f - f^R\|_p < \frac{\eta}{2}$.

El teorema de Féjer nos dice que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f^R - f_\epsilon^R\|_p = 0$, donde $f_\epsilon^R = \varphi_\epsilon * f^R$, por lo tanto podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que

$$\|f^R - f_\epsilon^R\|_p < \frac{\eta}{2}.$$

Luego $\|f - f_\epsilon^R\|_p < \|f - f^R\|_p + \|f^R - f_\epsilon^R\|_p < \eta$. Por otro lado, f_ϵ^R es de clase C^∞ y tiene soporte compacto ya que:

$$\text{sop}(f_\epsilon^R) \subset \text{sop}(f^R) + \text{sop}(\varphi_\epsilon) \subset B(0;R) + B(0;\epsilon) = B(0;R + \epsilon).$$

H.A.N.V.

8.3. La transformada de Fourier de las funciones de $S(\mathbb{R}^n)$.

Las funciones de decrecimiento rápido son integrables y, por tanto, tiene un sentido claro la fórmula

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx.$$

Propiedades:

1. $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
2. Traslaciones: (Multiplicaciones por caracteres $e^{2\pi i a \xi}$).

$$\begin{aligned} \widehat{\delta_a f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x - a) dx = \\ &= e^{2\pi i a \xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \xi} f(y) dy = e^{2\pi i a \xi} \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

La transformada de Fourier de la trasladada $\delta_a f$ es igual a la transformada de Fourier de f multiplicada por el carácter $e^{2\pi i a \xi}$.

3. Rotaciones: (Conmuta con las rotaciones de \mathbb{R}^n).

Sea $x \rightarrow Ax$ una rotación de \mathbb{R}^n : aplicación lineal tal que $A^{-1} = A^t$ (la inversa es igual a la traspuesta). Tenemos que:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(A\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i A\xi x} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi A^t x} f(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi A^{-1} x} f(x) dx = \det(A) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi y} f(Ay) dy = \\ &= \widehat{f \cdot A}(\xi),\end{aligned}$$

ya que $\det(A) = 1$.

4. Dilataciones: Dado $\delta > 0$ definimos $f_\delta(x) = f(\delta x)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\widehat{f}_\delta(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(\delta x) dx = \\ &= \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \delta^{-1} y \xi} f(y) dy = \delta^{-n} \widehat{f}(\delta^{-1} \xi)\end{aligned}$$

Es decir:

$$\widehat{f}_\delta = \delta^{-n} (\widehat{f})_{\delta^{-1}}, \quad \forall \delta > 0.$$

5. Derivación: Dada $f \in S(\mathbb{R}^n)$ tenemos que:

a)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \right) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{-2\pi i x \xi}) dx_j \right) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n = \\ &= 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi)\end{aligned}$$

Por inducción:

$$(D_x^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

La transformada de Fourier convierte la derivación D^α en multiplicación por el monomio $(2\pi i \xi)^\alpha$.

b) Recíprocamente: Dada $f \in S(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\widehat{(-2\pi i x)^\beta f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} (-2\pi i x)^\beta f(x) dx = D_\xi^\beta \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \right) = D_\xi^\beta (\widehat{f})(\xi)$$

8.3. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LAS FUNCIONES DE $S(\mathbb{R}^N)$. 101

Corolario 2. *La transformada de Fourier es un operador continuo en el espacio $S(\mathbb{R}^n)$.*

6. Convolución: Dadas dos funciones integrables $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sabemos que su convolución también lo es, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y podemos, por tanto, calcular su transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f * g(x) \, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, dy \right] \, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x-y) \, dx \right] \, dy = \end{aligned}$$

(haciendo $x - y = t$, $dx = dt$)

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (y+t)\xi} f(t) \, dt \right] \, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \xi} g(y) \, dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t \xi} f(t) \, dt = \\ &= \widehat{g}(\xi) \cdot \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Luego: $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

7. Las gaussianas (una fórmula explícita): sea $\Phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$, resulta que $\widehat{\Phi} = \Phi$:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} e^{-\pi|x|^2} \, dx = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x_1 \xi_1} e^{-\pi x_1^2} \, dx_1 \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x_n \xi_n} e^{-\pi x_n^2} \, dx_n \right) \end{aligned}$$

Luego, la fórmula $\widehat{\Phi} = \Phi$ se puede reducir al caso unidimensional:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} e^{-\pi x^2} \, dx = e^{-\pi \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} \, dx = e^{-\pi \xi^2} \int_{-\infty+i\xi}^{\infty+i\xi} e^{-\pi z^2} \, dz$$

El teorema de Cauchy de la variable compleja nos permite escribir:

$$\int_{-\infty+i\xi}^{\infty+i\xi} e^{-\pi z^2} \, dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} \, dt = 1$$

Observación.- Si cambiamos este resultado con la fórmula de las dilataciones obtenemos la familia de fórmulas:

$$\widehat{\delta^{-n/4} e^{-\pi \frac{\|x\|^2}{\delta}}(\xi)} = \delta^{n/4} e^{-\pi \delta \|\xi\|^2}$$

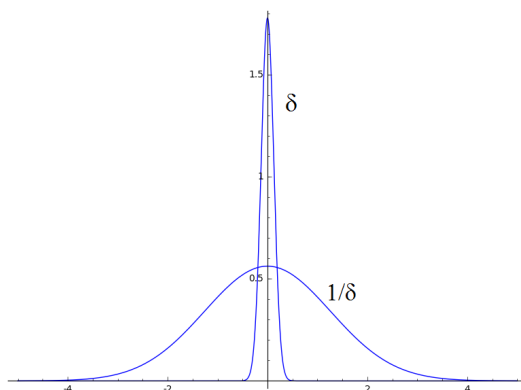


Figura 8.2.

a)

b)

$$\|\delta^{-n/4} e^{-\pi \frac{\|x\|^2}{\delta}}\|_2 = \|\delta^{n/4} e^{-\pi\delta\|x\|^2}\|_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

Proposición 5. (Teorema de inversión) Dada una función $f \in S(\mathbb{R}^n)$ tenemos que:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi) \, d\xi$$

Demostración: Obsérvese que al ser f una función del espacio $S(\mathbb{R}^n)$, \widehat{f} también lo es y, por lo tanto, la integral anterior es absolutamente convergente.

La manipulación más obvia que a uno se le puede ocurrir para probar la fórmula de inversión es escribir la integral de f y tratar de cambiar el orden de integración:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \xi} f(y) \, dy \right] \, d\xi$$

Sin embargo, ese intercambio no es del todo legal, ya que la función

$$F(y, \xi) = e^{2\pi i(x-y)\xi} f(y)$$

no es integrable en el espacio producto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$: $|F(y, \xi)| = |f(\xi)|$.

Afortunadamente, tenemos unas herramientas estupendas para sortear esta dificultad. Consideremos la argucia siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi) \, d\xi &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} e^{-\pi\delta|\xi|^2} \widehat{f}(\xi) \, d\xi = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} e^{-\pi\delta|\xi|^2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \xi} f(y) \, dy \right] \, d\xi = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y-x)\xi} e^{-\pi\delta|\xi|^2} \, d\xi \right] \, dy \end{aligned}$$

8.3. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LAS FUNCIONES DE $S(\mathbb{R}^N)$. 103

El cambio de orden de integración es ahora totalmente legal y consecuencia del teorema de Fubini ya que la función $e^{-\pi\delta|\xi|^2}|f(y)|$ es integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, la integral interior es la transformada de Fourier de la función de Gauss y conocemos su valor, a saber:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y-x)\xi} e^{-\pi\delta|\xi|^2} d\xi = \delta^{-n/2} e^{-\pi \frac{\|x-y\|^2}{\delta}}$$

Con lo que obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \delta^{-n/2} e^{-\pi \frac{\|x-y\|^2}{\delta}} dy = f(x)$$

ya que la familia $\delta^{-n/2} e^{-\pi \frac{\|x\|^2}{\delta}}$ constituye una aproximación de la identidad.

H.A.N.V.

Corolario 3. *Las transformaciones*

$$f \longrightarrow \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$$

$$f \longrightarrow \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} f(\xi) dx$$

Son isomorfismos continuos del espacio $S(\mathbb{R}^n)$ en si mismo y verifican:

$$(\widehat{f})^\vee = f, \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Proposición 6. *(Teorema de Plancherel) La transformada de Fourier \widehat{f} de una función $f \in S(\mathbb{R}^n)$ satisface la identidad siguiente:*

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}|^2 d\xi &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}|^2 e^{-\pi\delta|\xi|^2} d\xi = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\delta|\xi|^2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \right] \overline{\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \xi} f(y) dy \right]} d\xi = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\left[\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y-x)\xi} f(y) e^{-\pi\delta|\xi|^2} dy d\xi \right]} dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(y)} \delta^{-n/2} e^{-\pi \frac{\|y-x\|^2}{\delta}} dy \right) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(y)} \delta^{-n/2} e^{-\pi \frac{\|y-x\|^2}{\delta}} dy \right] dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f(x)} dx = \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

Obsérvese que los primeros cambios de orden de integración están justificados por la integrabilidad en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la función $|f(x)||f(y)|e^{-\pi\delta|\xi|^2}$; mientras que el intercambio del límite con la integral efectuado al final de la demostración es posible por el teorema de la convergencia dominada.

H.A.N.V.

8.4. La fórmula de Plancherel: Teoría $L^2(\mathbb{R}^n)$

La definición inicial de integral de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$$

solo tiene sentido cuando $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y en particular, para las funciones del espacio $S(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, el teorema de Plancherel antes obtenido, $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$, nos permite extender la definición de la transformada de Fourier de la manera siguiente:

Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sabemos que existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S(\mathbb{R}^n)$ que convergen a ella: $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$.

En particular, la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy en L^2 . El teorema de Plancherel nos asegura ($\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$) que la sucesión $\{\widehat{f}_n\}$ de sus transformadas de Fourier también es una sucesión de Cauchy. Como quiera que $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio métrico completo, la sucesión $\{\widehat{f}_n\}$ tendrá un límite en $L^2(\mathbb{R}^n)$ que podemos designar por \widehat{f} y llamarle transformada de Fourier de nuestra función original f .

Es claro que la licitud del proceso depende crucialmente de que el límite \widehat{f} sea independiente de la sucesión elegida para aproximar f . Supongamos pues que tenemos dos sucesiones:

$$\begin{aligned} \|f_k - f\|_2 &\rightarrow 0, & f_k &\in S(\mathbb{R}^n) & \forall k \\ \|g_m - f\|_2 &\rightarrow 0, & g_m &\in S(\mathbb{R}^n) & \forall m \end{aligned}$$

Claramente:

$$\|f_k - g_k\|_2 \leq \|f_k - f\|_2 + \|f - g_k\|_2 \rightarrow 0$$

luego

$$\|\widehat{f}_k - \widehat{g}_k\|_2 = \|f_k - g_k\|_2 \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty$$

y, por tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{g}_k = \widehat{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Es decir, podemos extender el teorema de Plancherel:

Teorema 17. *Teorema de Plancherel.-*

1. Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ su transformada de Fourier \widehat{f} también está en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y verifica la identidad:

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

2. La transformada de Fourier $\widehat{}$ y su inversa $\check{}$ son isometrías del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Corolario 4. (*Identidad de Parseval*) Dadas dos funciones f y g del espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ tenemos que:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$$

Demostración:

$$\|f + g\|_2^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\operatorname{Re}\langle f, g \rangle$$

$$\|\widehat{f} + \widehat{g}\|_2^2 = \langle \widehat{f} + \widehat{g}, \widehat{f} + \widehat{g} \rangle = \|\widehat{f}\|_2^2 + \|\widehat{g}\|_2^2 + 2\operatorname{Re}\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$$

El teorema de Plancherel nos da la identidad:

$$\operatorname{Re}\langle f, g \rangle = \operatorname{Re}\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$$

Por otro lado:

$$\|f + ig\|_2^2 = \langle f + ig, f + ig \rangle = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\operatorname{Im}\langle f, g \rangle$$

$$\|\widehat{f} + i\widehat{g}\|_2^2 = \langle \widehat{f} + i\widehat{g}, \widehat{f} + i\widehat{g} \rangle = \|\widehat{f}\|_2^2 + \|\widehat{g}\|_2^2 + 2\operatorname{Im}\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$$

Es decir: $\operatorname{Im}\langle f, g \rangle = \operatorname{Im}\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$

Por tanto, $\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$.

H.A.N.V.

La identidad de Plancherel nos dice que la transformada de Fourier (y su inversa) es un operador unitario de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Observemos la analogía entre $\widehat{\cdot}$ y $\check{\cdot}$:

$$\check{f}(x) = \overline{\widehat{f}(x)}$$

donde, como es habitual, $\overline{\cdot}$ denota la conjugación compleja:

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} f(\xi) \, d\xi = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} \overline{f(\xi)} \, d\xi} = \overline{\widehat{f}(x)}$$

Por otro lado, dada $f \in S(\mathbb{R}^n)$, tenemos que:

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi) \, d\xi = f(-x)$$

por el teorema de inversión. Luego:

$$\widehat{\widehat{\widehat{f}}} = f$$

La gaussiana $\Phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ coincide con su propia transformada $\widehat{\Phi} = \Phi$. Este hecho puede parafrasearse afirmando que Φ es una autofunción del operador transformada de Fourier, correspondiente al autovalor $\lambda = 1$.

En general una autofunción ($f \neq 0$) de autovalor λ ha de verificar la ecuación:

$$\widehat{f} = \lambda f$$

Por tanto:

$$f = \widehat{\widehat{\widehat{f}}} = \lambda^4 f$$

Es decir, $\lambda^4 = 1 \Rightarrow \lambda = 1, -1, i, -i$ son los únicos posibles autovalores de $\widehat{\cdot}$.

Consideremos el caso $n = 1$.

Dada una función $f \in S(\mathbb{R})$ tenemos que $\left(\frac{d^2 f}{dx^2} - 4\pi^2 x^2 f\right)^\wedge(\xi) = \frac{d^2 \hat{f}}{d\xi^2} - 4\pi^2 \xi^2 \hat{f}$. Es decir, el operador $\frac{d^2}{dx^2} - 4\pi^2 x^2$ coincide con su "transformado". No es de extrañar, por tanto, que las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - 4\pi^2 x^2 f = \lambda f \quad (*)$$

desempeñen un papel importante en la teoría de la transformada de Fourier:

Escribamos $f(x) = u(x)e^{-\pi x^2}$, la ecuación (*) se convierte en la siguiente ecuación en términos de la función $u(x)$:

$$\begin{cases} f'(x) = (u'(x) - 2\pi x u(x))e^{-\pi x^2} \\ f''(x) = (u''(x) - 2\pi x u'(x) - 2\pi u(x) - 2\pi x u'(x) + 4\pi^2 x^2 u(x))e^{-\pi x^2} \end{cases}$$

$$u''(x) - 4\pi x u'(x) - 2\pi u(x) = \lambda u(x) \quad (**)$$

Busquemos una solución polinómica:

$$u(x) = H_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0$$

$$\sum_{k=2}^n k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=1}^n 4\pi^k a_k x^k + \sum_{k=0}^n (2\pi + \lambda)a_k x^k$$

En particular:

$$(4\pi n + 2\pi + \lambda)a_n = 0$$

y como $a_n \neq 0 \Rightarrow \lambda = -2\pi(2n+1)$, y $0 = [4\pi(n-1) + 2\pi - 2\pi(2n+1)]a_{n-1} \Rightarrow a_{n-1} = 0$, y

$$a_{n-2} = \frac{k(k-1)a_k}{4\pi(k-2) - 4\pi n} = -\frac{k(k-1)}{4\pi(n-k+2)} a_k$$

Luego, todos los coeficientes a_k con $k \equiv n \pmod{2}$ son distintos de cero; mientras que si $k \not\equiv n \pmod{2}$ entonces $a_k = 0$.

$$H_n(x) = a_n \left(x^n - \frac{n(n-1)}{8\pi} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8\pi 16\pi} x^{n-4} - \dots \right)$$

La elección $a_n = \frac{4^n \pi^n}{n!}$ permite escribir la fórmula:

$$H_n = \frac{(-1)^n}{n!} e^{2\pi x^2} D_x^n (e^{-2\pi x^2}) \quad (***)$$

Ejercicio: Comprobar que la función $\frac{(-1)^n}{n!} e^{2\pi x^2} D_x^n (e^{-2\pi x^2})$ verifica también la ecuación diferencial de 2º orden:

$$\begin{cases} u''(x) - 4\pi x u'(x) + 4\pi n u = 0 \\ u(0) = H_n(0) \\ u'(0) = H_n'(0) \end{cases}$$

lo que demuestra la identidad (***) .

A continuación vamos a demostrar que las funciones de Hermite son autofunciones de la transformada de Fourier:

$$\widehat{h}_n(\xi) = (-i)^n h_n(\xi)$$

Esto es una consecuencia de las siguientes observaciones, cuya demostración dejamos como ejercicio:

$$1. h'_n(x) - 2\pi x h_n(x) = -(n+1)h_{n+1}(x)$$

$$2. h'_n(x) + 2\pi x h_n(x) = 4\pi h_{n-1}(x)$$

Demostración: Tomando la transformada de Fourier de ambas identidades llegamos a:

$$\begin{aligned} 2\pi\xi\widehat{h}_n(\xi) - \frac{1}{i}\widehat{h}_n'(\xi) &= -(n+1)\widehat{h}_{n+1}(\xi) \\ \widehat{(-i)^n h_n}'(\xi) + 2\pi\xi\widehat{(-i)^n h_n}(\xi) &= -(n+1)\widehat{(-i)^{n+1} h_{n+1}}(\xi) \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\widehat{(-i)^n h_n}'(\xi) + 2\pi\xi\widehat{(-i)^n h_n}(\xi) = 4\pi\widehat{(-i)^{n-1} h_{n-1}}(\xi)$$

Es decir, tanto la familia de funciones $\{h_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ como $\{(-i)^n \widehat{h}_n\}_{n=0,1,\dots}$ verifican las mismas fórmulas de recurrentes. Por otro lado

$$\widehat{h}_0(\xi) = h_0(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$$

luego, $\widehat{(-i)^n h_n} = h_n$ para todo n .

H.A.N.V.

Ortogonalidad: Las funciones $\{h_n\}$ forman un sistema ortogonal en $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración: Recordemos que h_n verifica la relación:

$$Ph_n = h_n'' - 4\pi^2 x^2 h_n = -2\pi(2n+1)h_n$$

y el operador P autoadjunto (integración por partes).

Es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ph_n(x)h_m(x) dx = -2\pi(2n+1) \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)h_m(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n Ph_m(x) dx = -2\pi(2m+1) \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)h_m(x) dx$$

y $\int Ph_n(x)h_m(x) dx = \int h_n Ph_m(x) dx$ por ser P autoadjunto. Lo que implica que si $n \neq m$ entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)h_m(x) dx = 0$$

H.A.N.V.

Complejitud.- La familia $\{h_n\}$ es un sistema ortogonal completo, es decir, el espacio lineal engendrado por $\{h_n\}$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$. (ejercicio).

Conclusión: La familia $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ constituye una base ortogonal del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ de autofunciones de la transformada de Fourier. Podemos, por tanto, siguiendo a Norbert Wiener redefinir la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ por medio de la receta:

$$\widehat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle (-i)^n e_n$$

donde $e_n = \frac{h_n}{\|h_n\|_2}$ es la función de Hermite normalizada.

Ejercicio.- Encontrar las autofunciones de la transformada de Fourier en dimensión arbitraria $n \geq 1$.

8.5. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$: el lema de Riemann-Lebesgue.

En el caso de una función integrable ($f \in L^1(\mathbb{R}^n)$) la transformada de Fourier está directamente definida por medio de la fórmula integral:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$$

y tenemos

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$$

El teorema de la convergencia dominada nos permite concluir que \widehat{f} es una función continua:

Sea $\xi_n \rightarrow \xi$ una sucesión convergente en \mathbb{R}^n , tenemos que:

$$\lim_{\xi_n \rightarrow \xi} \widehat{f}(\xi_n) = \lim_{\xi_n \rightarrow \xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi_n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\xi_n \rightarrow \xi} e^{-2\pi i x \xi_n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx = \widehat{f}(\xi)$$

Luego \widehat{f} es una función acotada y continua siempre que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. El siguiente lema nos asegura que, además, \widehat{f} se anula en el infinito.

Lema 7. (*Riemann-Lebesgue*).- La transformada de Fourier \widehat{f} de una función integrables se anula en el infinito, es decir:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Demostración: Es del todo idéntica a la del caso periódico: primero comprobamos que el resultado es cierto para una clase especial de funciones, por ejemplo para $S(\mathbb{R}^n)$; después utilizamos un argumento de densidad:

8.5. LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN $L^1(\mathbb{R}^N)$: EL LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE. 109

1. Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ y, por tanto,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0$$

2. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y dado $\varepsilon > 0$, sea $g \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\| \leq \varepsilon/2$. Entonces

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{g}(\xi)| + \|f - g\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\widehat{g}(\xi)|$$

Dado que $\widehat{g} \in S(\mathbb{R}^n)$, podemos encontrar $R = R(\varepsilon)$, de manera que $|\widehat{g}(\xi)| \leq \varepsilon/2$ si $|\xi| \geq R$. Luego, $|\widehat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$ si $|\xi| \geq R(\varepsilon)$ y, por tanto:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0$$

H.A.N.V.

Observación.- A diferencia del caso periódico, sabemos que $L^2(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$. De hecho, el lema de Riemann-Lebesgue es falso en el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$: existen funciones f de $L^2(\mathbb{R}^n)$ para las cuales no es cierto que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Ejercicio: Consideremos la función definida ppor medio de la serie:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[n-\frac{1}{n^2}, n]}(x)$$

Es claro que $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\|g\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

Por lo tanto, $\widehat{g} = f$ es también una función de $L^2(\mathbb{R}^n)$:

Sin embargo, $\widehat{f}(-\xi) = g(\xi)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$ y es claro que:

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 1 \neq 0$$

8.5.1. La fórmula de inversión en el caso $L^1(\mathbb{R}^n)$:

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi$ no tiene por qué ser absolutamente convergente ya que, en general, $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, el mismo artificio que utilizamos para poder intercambiar el orden de integración en el caso de las funciones del espacio $S(\mathbb{R}^n)$, nos permite obtener:

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sea $\sigma_\delta f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} e^{-\delta \pi |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d\xi$ con $\delta > 0$, tenemos que:

1. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\sigma_\delta f - f\|_1 = 0$

2. Si f es continua en el punto $x \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\delta} f(x) = f(x)$.
3. Si f tiene una discontinuidad de tipo salto en el punto x , entonces:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\delta} f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

La demostración de estas afirmaciones es una consecuencia del teorema de las aproximaciones de la identidad:

$$\begin{cases} \sigma_{\delta} f(x) = K_{\delta} * f(x) \\ K_{\delta}(x) = \delta^{-n/2} e^{-\pi \frac{|x|^2}{\delta}} \end{cases}$$

Observación.- Es claro que el papel de K_{δ} puede ser desempeñado por otras aproximaciones de la identidad.

Ejercicio.- Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ consideremos ($\varepsilon > 0$)

$$P_{\varepsilon} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} \left(\frac{\sin(\pi \varepsilon \xi)}{\pi \varepsilon \xi} \right)^2 \hat{f}(\xi) d\xi$$

Demostrar para la familia P_{ε} las mismas propiedades.

8.6. La fórmula de sumación de Poisson

Sea $f \in S(\mathbb{R})$ una función de decrecimiento rápido y $\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$ su transformada de Fourier. Tenemos dos maneras de construir funciones periódicas, de periodo 1, a partir de f , a saber:

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x - n)$$

$$G(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

Obsérvese que la hipótesis de que $f \in S(\mathbb{R})$ implica que ambas series convergen absolutamente. Además:

$$\int_0^1 F(x) dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x - n) dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy$$

La fórmula de sumación de Poisson es una consecuencia de la identidad $F(x) = G(x) \quad \forall x \in [0, 1]$.

Como F es claramente una función periódica, de periodo 1, y de clase C^{∞} , para demostrar la igualdad $F(x) = G(x) \quad \forall x \in [0, 1]$ basta con obtener que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

es la serie de Fourier de F :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-2\pi i n x} F(x) dx &= \int_0^1 e^{-2\pi i n x} \sum_{-\infty}^{\infty} f(x-k) dx = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x-k) e^{-2\pi i n x} dx = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(y) e^{-2\pi i n (y+k)} dy = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{-2\pi i n y} f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n y} f(y) dy = \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

Obsérvese que el decaimiento rápido de la función f convierte en legal todas las manipulaciones anteriores. La fórmula de sumación de Poisson consiste en la identidad: $F(0) = G(0)$.

Teorema 18. *Fórmula de Sumación de Poisson (caso unidimensional).*- Toda función $f \in S(\mathbb{R})$ verifica que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$$

La hipótesis $f \in S(\mathbb{R})$ es cómoda pero, en absoluto, necesaria. Por ejemplo, es suficiente si f y su transformada de Fourier \widehat{f} satisfacen una estimación del tipo:

$$|f(x)| + |\widehat{f}(x)| \leq C \cdot (1 + |x|)^{-1-\varepsilon}$$

donde $\varepsilon > 0$.

En este caso, ambas series $\sum f(n)$ y $\sum \widehat{f}(n)$ son absolutamente convergentes. La misma demostración anterior nos da también la identidad:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$$

Ejemplo:

1. Sean $f(x) = e^{-\pi\delta|x|^2}$, $\widehat{f}(\xi) = \delta^{-1/2} e^{-\pi \frac{|\xi|^2}{\delta}}$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\delta k^2} = \delta^{-1/2} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2/\delta}$$

2. $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} \frac{1}{1+x^2} dx$$

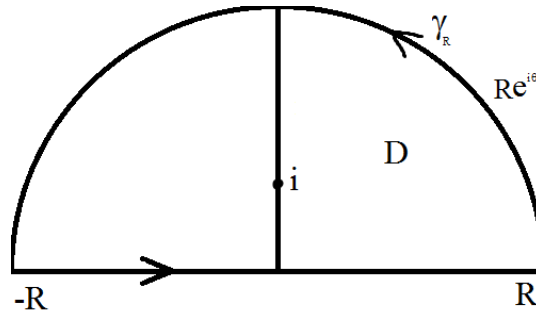


Figura 8.3.

Teorema de los residuos: Sea $\xi < 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} e^{-2\pi i \xi z} \frac{1}{1+z^2} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R e^{-2\pi i x \xi} \frac{1}{1+x^2} dx + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} e^{-2\pi i z \xi} \frac{1}{1+z^2} dz = \text{Res} \left(e^{-2\pi i z \xi} \frac{1}{1+z^2}; i \right) \end{aligned}$$

en γ_R : $e^{-2\pi i \xi R(\cos(\theta)+i \sin(\theta))} = e^{-2\pi i \xi R \cos(\theta)} e^{2\pi \xi R \sin(\theta)}$ con $\xi R \sin(\theta) < 0$ pues $\xi < 0$.

Luego:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{-2\pi i z \xi} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$$

y

$$\hat{f}(\xi) = \frac{-2\pi i}{\pi} \text{Res} \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{1+z^2}; i \right) = \frac{-2\pi i}{\pi} \frac{e^{-2\pi |\xi|}}{-2i} = e^{-2\pi |\xi|}$$

Por simetría de la transformada obtenemos $\xi > 0$.

La fórmula de sumación de Poisson nos da

$$\frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi |n|}$$

o bien:

$$\frac{1}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n}$$

La fórmula de sumación de Poisson tiene un interés en cristalografía al estudiar los espectros de difracción de las estructuras periódicas (cristales) y en teoría de los números. El resultado es cierto en cualquier dimensión:

$$f \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \sum_{v \in \mathbb{Z}^n} f(v) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(v)$$