1) Supongamos que la función $f \geq 0$ es integrable.
Dado $\alpha > 0$ sea $E_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$.

Demostrar la desigualdad. (μ = medida de Lebesgue):

$$\mu(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx .$$

2) Si f es integrable demostrar que la función $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ es uniformemente continua.

3) Supongamos que $f \in L^1[0,1]$ y sea $\tilde{f}$ su extensión a toda la recta que es periódica de periodo 1. Demostrar que

$$\int_a^{a+1} \tilde{f}(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad \text{para todo valor de } a.$$

4) Consideremos la convolución $f*g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy$

a) Probar que $f*g$ es uniformemente continua siempre que f sea integrable y g acotada.

b) Si además g es integrable, demostrar que $f*g(x) \longrightarrow 0$ cuando $|x| \to \infty$.

5) Demostrar que si $\epsilon > 0$ entonces la función $F(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^\epsilon}$ es la transformada de Fourier de una función integrable.

6) Sea E un subconjunto medible de $[0,1]$

Demostrar que

$$\int_E \cos^2 2\pi(nx + u_n)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mu(E)}{2}$$

para cualquier sucesión u_n.

7) Calcular la transformada de Fourier de la función:

$$f(x) = g * h(x)$$

donde $f(x) = e^{\pi i x}\, e^{-10|x-3|^2}$

$$g(x) = \frac{1}{1 + |x-7|^2}.$$

8) Sea la función periódica

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i x}}{1 + |x-k|^2}$$

Demostrar que $F \in L^1[0,1]$ y hallar su serie de Fourier.

(9) Sea f una función integrable, periódica de periodo igual a 1.

a) Mostrar que la serie de Fourier de f puede escribirse en la forma

$$f(\theta) \sim \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1} [\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)] \cos 2\pi n\theta +$$

$$+ i \sum_{n\geq 1} [\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)] \operatorname{sen} 2\pi n\theta.$$

b) Demostrar que si f es par, entonces $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$ y obtenemos una serie de cosenos.

c) Demostrar que si f es impar, entonces $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n)$ y tenemos una serie de senos.

d) Demostrar que f es real si y solo si $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n)$. para todo n.

(10) Consideremos la función periódica impar definida por la fórmula $f(\theta) = \theta(\frac{1}{2} - \theta)$ $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ y cuyo periodo es 1.

a) Dibujar la gráfica de f.

b) Calcular su serie de Fourier

(11) Sea f la función definida en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ por la fórmula $f(\theta) = |\theta|$.

Calcular su serie de Fourier y usarla para probar las identidades:

$$\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(12) Sea $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ la función indicadora del intervalo $[a, b]$: $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Calcular su serie de Fourier y estudiar su convergencia puntual.

(13) Sea $P_r(\theta)$ el núcleo de Poisson del disco unidad en $\mathbb{R}^2$.

Probar que la función $u(r,\theta) = \frac{\partial P_r}{\partial \theta}$ definida cuando $0 \leq r < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$ verifica:

i) $\Delta u = 0$ en el disco

ii) $\lim_{r \to 1} u(r, \theta) = 0, \ \forall \theta$.

(14) Sea $D_N(\theta)$ el núcleo de Dirichlet

$$D_N(\theta) = \sum_{k=-N}^{+N} e^{2\pi i k\theta}$$

y definamos

$$L_N = \int_0^1 |D_N(\theta)|\, d\theta$$

a) Demostrar que existe una constante positiva $c>0$ tal que: $L_N \geq c \log N$.

b) Afinar el cálculo anterior y demostrar que

$$L_N = c \log N + O(1), \qquad N \to \infty$$

para un cierto valor de $c>0$.

(15) Consideremos la función periódica de periodo 1 e impar, definida por: $f(\theta) = \theta\left(\frac{1}{2} - |\theta|\right)$, $|\theta| \leq \frac{1}{2}$.

Calcular su serie de Fourier y usarla para demostrar las identidades.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

16 Demostrar que la serie de Fourier de una función con derivada continua en el intervalo $[0,1]$ es absolutamente convergente.

17 Definamos los núcleos

$$L_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-x^2)^n}{c_n}, & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 0 & |x| \ge 1. \end{cases}$$

donde c_n esta escogido de manera que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_n(x)\,dx = 1.$$

Probar que $L_n(x)$ es una aproximación de la identidad $\left(\forall \delta > 0. \int_{|x|\ge\delta} L_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$.

Sea f una función continua con soporte en el intervalo $[-1/2, \frac{1}{2}]$, entonces $L_n * f$ es una sucesión de polinomios en $[-1/2, 1/2]$ que converge uniformemente a f.