UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Ejercicios Variable Real

Antonio Córdoba (Manuel Mellado Cuerno)

1º Cuatrimestre del curso 2016-2017

manuel.mellado@estudiante.uam.es

Capítulo 1

Introducción.

1. Consultar alguna monografía de historia de las Matemáticas y estudiar las polémicas de Bernoulli, Euler y d'Alembert, así como las de Fourier y sus contemporáneos.

Capítulo 2

Espacios de funciones.

1. Sea $r > 1$, ¿a qué espacios $L^p[0,1]$ pertenece la función $x^{-1/r}$? Dado $p_1 < p_2$ dar un ejemplo de una función $f \in L^{p_1}[0,1]$ pero que $f \notin L^{p_2}[0,1]$.

2. Demostrar la desigualdad
$$(A+B)^p \leq 2^{p-1}(A^p + B^p),\ p \geq 1,\ A,B \geq 0.$$
<u>Idea:</u> Usar el teorema de los multiplicadores de Lagrange para obtener $\text{máx}(A+B)^p$ en el conjunto $\{A,B \geq 0,\ A^p + B^p = 1\}$.

3. Aplicar la desigualdad de Young al caso $\varphi(u) = e^u - 1$.

4. Sea $f_n \in L^2[a,b],\ n = 1,2,\ldots$ y $f \in L^2[a,b]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f||_2 = 0$.
Comprobar que
$$\int_a^b f^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^2 dx.$$

5. Dado $1 \leq p < \infty$ consideremos el espacio L^p formado por las sucesiones doblemente infinitas
$$\ldots, -a_3, -a_2, -a_1, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \ \{a_n\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$$
tales que $\left(\sum |a_n|^p\right)^{1/p} = ||\{a_n\}||_p < \infty$.
Análogamente definimos $L^\infty = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\ \sup_n |a_n| < \infty\}$. Demostrar:
   a) <u>Desigualdad de Hölder:</u> Sean $p,\ q,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 \leq p,q \leq \infty$, tenemos que:
$$\left|\sum a_n b_n\right| \leq \left(\sum |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum |b_k|^q\right)^{1/q}$$
   b) <u>Desigualdad de Minkowski:</u>
$$||(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{Z}}||_p \leq ||\{a_n\}||_p + ||\{b_n\}||_p,$$
   es decir:
$$\left(\sum |a_n + b_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |a_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_k|^p\right)^{1/p}$$

c) L^p es un espacio métrico completo.

6. Sea $f(x) = (x)$ =parte fraccionaria de x. Calcular: $f * f$.

7. Sea g la función periódica de periodo 1 definida por $g(x) = 1$ si $1/3 \leq x \leq 2/3$ y $g(x) = 0$ si $x \in [0,1) - [1/3, 2/3)$.

   Calcular $g * g$ y $g * f$ $f(x) = (x)$.

8. Sean φ y ψ funciones periódicas de periodo 1, demostrar que

$$sop(\varphi * \psi) \subset sop(\varphi) + sop(\psi).$$

9. Sea $f_n(x) = n^{1/p} e^{-nx}$, $p > 1$, $x \in [0,1]$. Demúestrese que $f_n(x) \longrightarrow 0$ en casi todo punto pero no en $L^p[0,1]$.

10. Todo entero positivo m puede escribirse e una única manera como $m = 2^n + k$, $0 \leq k < 2^n - 1$. Sea $\varphi_m(x) = \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(x)$.

    Demostrar que $||\varphi_m||_p \longrightarrow 0$, $1 \leq p \leq \infty$, pero que, sin embargo, $\{\varphi_m(x)\}$ no es convergente en ningún punto.

11. Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n^{1/4}}, \ x \in [0,1]$$

    y definamos la sucesión

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x), \ x \in [0,1].$$

    Estúdiese la convergencia de S_N en $L^1[0,1]$ en casi todo punto y uniformemente en $[0,1]$.

    Demuéstrese la igualdad:

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Big) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$$

12. Demuéstrese que si f es medible

$$\lim_{p \to \infty} \Big(\int_0^1 |f(x)|^p dx \Big)^{1/p} = ||f||_\infty$$

13. Consideremos la sucesión de funciones $f_n(x) = n^\alpha (1-x) x^n$, $x \in [0,1]$.

    a) Estúdiese para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x) dx$$

b) Analícese para qué valores de α la sucesión converge en $L^1[0,1]$.

14. Dados $p,q,r,\ 1 \leq p,q,r < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\frac{1}{r} = 1$ demostrar la desigualdad siguiente:
$$\left|\int_0^1 fghdx\right| \leq ||f||_p ||g||_q ||h||_r$$

15. Demostrar la desigualdad de Chebychev:
$$\mu\{x|\ |f(x)| > \alpha > 0\} \leq \frac{||f||_p^p}{\alpha^p},\ 1 \leq p < \infty.$$

16. Sea f una función medible en $[0,1]$. Demostrar que f es integrable si y sólo si:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x : |f(x)| \geq n\} < \infty.$$

17. El espacio $L^2[0,1]$ tiene una estructura más rica que el general L^p ya que la norma proviene de un producto escalar: $< f,g >= \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$. Demostrar la identidad (del paralelogramo):
$$||f+g||_2^2 + ||f-g||_2^2 s = 2(||f||_2^2 + ||g||_2^2)$$

Capítulo 3

El Teorema Fundamental del Cálculo.

1. Desigualdad de Chebychev: Supongamos que $f \geq 0$ está en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Demostrar que

$$\mu\{x : f(x) < \alpha > 0\} \leq \frac{1}{\alpha^p} ||f||_p^p$$

2. Supongamos que f es integrable en $\mathbb{R}^n$. Dado $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n)$, $\delta_j \neq 0 \ \forall j$, definamos

$$f_\delta(x) = f(\delta_1 x_1, ..., \delta_n x_n).$$

Demostrar que f_δ es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\delta(x)dx = |\delta_1|^{-1} \cdots |\delta_n|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

3. Demostrar que si f es integrable en $\mathbb{R}^n$ y f no es idénticamente cero, entonces

$$Mf(x) \geq \frac{C}{|x|^n}$$

para alguna constante $C > 0$ y todo $|x| \geq 1$.

4. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{|x|\left(log\frac{1}{|x|}\right)^2}, \ |x| \leq \frac{1}{2}$$
$$f(x) = 0, \text{ en otro caso.}$$

   a) Comprobar que f es integrable.

b) Establecer la estimación

$$Mf(x) \geq \frac{C}{|x|\left(log\frac{1}{|x|}\right)}$$

para alguna constante $C > 0$ y todo $|x| \leq 1/2$.

c) ¿Es $Mf(x)$ localmente integrable?

5. Construir una función creciente en la recta real cuyo conjunto de discontinuidades sean los números racionales.

6. Sea $\mathscr{R}$ el conjunto de todos los rectángulos de $\mathbb{R}^2$ que contienen el origen y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

   Consideremos el operador maximal asociado a esta familia

$$\mathscr{M}f(x) = \sup_{R\in\mathscr{R}} \frac{1}{\mu(R)} \int_R |f(x-y)|dy.$$

   Dar un ejemplo que muestre que $\mathscr{M}$ no es de tipo débil $(1,1)$. Es decir, que no podemos tener una estimación

$$\mu\{\mathscr{M}f(x) > \alpha > 0\} \leq C\frac{||f||_1}{\alpha}.$$

   Sin embargo, $\forall p > 1$, se verifica la acotación:

$$||\mathscr{M}f||_p \leq C_p||f||_p$$

   donde $C_p < \infty$ es una constante independiente de la función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Capítulo 4

Ejemplos de Series de Fourier.

1. Decidir si las funciones siguientes son o no son periódicas. En caso afirmativo, calcular sus periodos

   a) $f(t) = \cos(8t) + \operatorname{sen}((2+\pi)t)$

   b) $f(t) = \cos(4\pi t) + 7\operatorname{sen}(5\pi t)$

   c) $f(t) = (\pi\cos(t))^2$

2. Encontrar la serie de Fourier de las funciones:

   a) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ \operatorname{sen}(t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$

   b) $f(t) = \operatorname{sen}^5(2\pi t)$

   c) $f(t) = e^{\lambda t},\ 0 \le t \le 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$

3. Escribir el operador de laplace $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ en coordenadas polares $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{array}{ll} 0 < r < \infty & x = r\cos(2\pi\theta) \\ 0 \le \theta < 1 & y = r\operatorname{sen}(2\pi\theta) \end{array}$$

   Comprobar que las funciones $r^n\cos(2\pi n\theta)$ y $r^n\operatorname{sen}(2\pi n\theta)$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ son armónicas en el disco unidad. Es decir, verifican la ecuación $\Delta u = 0$.

4. Calcular el valor de las integrales siguientes con $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(2\pi m x)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(2\pi m x)\operatorname{sen}(2\pi n x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \cos(2\pi m x)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x$$

Capítulo 5

Propiedades de los coeficientes de Fourier. Aproximaciones de la identidad. Teoría L^2.

1. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $P(x) = \sum_{-N}^{N} a_n e^{2\pi i n x}$. Calcular los coeficientes de Fourier del producto $f \cdot .P$

2. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y m un entero positivo. Definimos $f_{(m)}(x) = f(mx)$. Demostrar que $\widehat{f_{(m)}}(n) = \widehat{f}\left(\frac{n}{m}\right)$ si $n = m$ y 0 si $m \neq n$.

3. El polinomio trigonométrico $cos(2\pi n x) = \frac{1}{2}(e^{2\pi i n x} + e^{-2\pi i n x})$ es de grado n y tiene $2n$ ceros en $\mathbb{T}$. Demostrar que ningún polinomio trigonométrico de grado $n > 0$ puede tener más de $2n$ ceros en $\mathbb{T}$.

4. Demostrar que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ entonces
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1/2}^{1/2} f(t)g(nt)dt = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

5. Sea $E \subset [0,1]$ un conjunto medible, demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} \int_E cos(2\pi n x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E sen(2\pi n x)dx = 0.$$

6. Sean $n_1 < n_2 ...$ una sucesión creciente de enteros positivos.
Definimos $E = \{x \in [0,1] : \text{existe} \lim_{k\to\infty} sen(2\pi n_k x)\}$. Demostrar que E tiene medida cero.

7. Calcular
$$\min_{a,b,c} \int_{-1/2}^{1/2} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx$$

$$\text{máx} \int_{-1/2}^{1/2} x^3 g(x) dx,$$

donde la función g verifica las restricciones

$$\int_{-1/2}^{1/2} g(x)dx = \int_{-1/2}^{1/2} xg(x)dx = \int_{-1/2}^{1/2} x^2 g(x)dx = 0, \ \int_{-1/2}^{1/2} |g(x)|^2 dx = 1.$$

8. Evaluar las siguientes sumas usando la identidad de Bessel

   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2+1)^2}$.
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$.

9. Sea $E \subset [0,1]$ medible. Demostrar que existe $\epsilon > 0$ de manera que

$$\left| \int_E e^{2\pi i n t} dt \right| \leq 1 - \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 6

La convergencia puntual de las Series de Fourier.

1. Estudiar la convergencia puntual de las series de Fourier de la siguiente familia de funciones $f_\alpha(x) = x^\alpha sen(1/x),\ 0 < \alpha$.

2. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} S_n f(x)$, $x \in [0,1]$ para las siguientes funciones:

   a) $f(t) = signo(tan(4\pi x))$.

   b) $f(t) =$ tercera cifra decimal de t en base 10.

3. El espacio $\Lambda^\alpha(\mathbb{T}) = \left\{ f \in C(\mathbb{T}) : ||f||_{\Lambda^\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{T}} |f(x)| + \sup_{x,y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$, $0 < \alpha \leq 1$, es un espacio vectorial normado. Demostrar que es completo.

4. La definición anterior no es válida cuando $\alpha > 1$. ¿Por qué? La definición interesante en ese caso es la siguiente: si $\alpha = k + \beta,\ k = [\alpha],\ \beta = (\alpha)$, entonces tenemos:

$$\Lambda^{k,\beta} = \left\{ f \in C^k(\mathbb{T}) : \sup_{x\neq y} \frac{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)|}{|x-y|^\beta} < \infty \right\}$$

$$||f||_{\Lambda^{k,\beta}} = \sum_{j=1}^{k} \sup_x |f^{(j)}(x)| + \sup_{x,y} \frac{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)|}{|x-y|^\beta}$$

   Demostrar que también $\Lambda^{k,\beta},\ k \in \mathbb{N},\ 0 < \beta < 1$ es un espacio vectorial normado y completo.

Capítulo 7

Algunas Aplicaciones de las Series de Fourier.

1. Sea $y = y(t)$ una curva continua en $0 \leq t \leq 1$, demostrar que su longitud es finita si y solo si $y(t)$ es de variación acotada.

Capítulo 8

La Integral de Fourier.

1. Comprobar que e^{-x^2} pertenece a $S(\mathbb{R})$ pero $\frac{1}{1+x^2}$ y $e^{-|x|}$ no, aunque por razones distintas.

2. Comprobar que si $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^1)$ es rápidamente decreciente en el sentido de que
$$\xi^n \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^1),\ \forall n \geq 0,$$
entonces $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y todas sus derivadas $D^k f$ están en $L^2(\mathbb{R}^1)$.

   Recíprocamente: comprobar que si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $D^k f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ $\forall k = 0,1,2,...$ entonces $\widehat{f}$ es rápidamente decreciente.

3. Calcular las transformadas de Fourier de las funciones:

   a) $\chi_{[a,b]}$.
   b) $f(x) = 1 - |x|$ si $|x| \leq 1$ y $f(x) = 0$ si $|x| > 0$.
   c) En $\mathbb{R}^2$: $f(x,y) = 1$ si $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ y $f(x,y) = 0$ en caso contrario.
   d) $f(x) = e^{-2\pi|x|},\ x \in \mathbb{R}^n$.
   e) $f(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},\ x \in \mathbb{R}^n$.
   f) $f(x) = (cos(ax))e^{-\pi|x|^2},\ a = (a_1,...,a_n)$.
   g) $f(x) = (sen(7(x-3)))e^{-\pi(x-5)^2}$.
   h) Calcular (usando la transformada de Fourier) las convoluciones siguientes:
      1) $\phi_1(x) = e^{-\pi x^2}, \phi_2(x) = e^{-\pi\frac{x^2}{13}}, \phi_3(x) = e^{-\pi 7x^2} \Rightarrow \phi_1 * \phi_2 * \phi_3$.
      2) $\left(\frac{1}{1+x^2}\right) * \left(\frac{1}{1+x^2}\right) * \left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.

4. Demostrar que si la transformada de Fourier de una función real $f(t)$ es real, entonces f es una función par de t; y que si la transformada de Fourier de una función real es imaginaria pura, entonces f es una función impar.

5. Encontrar la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-\beta t}$ si $t \geq 0$ y $f(t) = 0$ si $t < 0$.

6. Hallar la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \frac{sen(at)}{t}$$

7. Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f > 0$. Demostrar que $|\widehat{f}(\xi)| < \widehat{f}(0)$, $\forall \xi \neq 0$.

8. Calcular

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \frac{sen(\lambda t)}{t} e^{itx} dt,$$

donde $\lambda > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

9. Demostrar la identidad:

$$\frac{e^{2\pi\alpha} + 1}{e^{2\pi\alpha} - 1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}$$